Chapitre 1

1. Supposons qu'un programme résoud le problème suivant.
   input : Un tableau $A[1..n]$ de n nombres.
   output : Deux indices i et j tels que $1 \leq i < j \leq n$ et la différence $A[j] - A[i]$ est maximisée.

   Quel output devrait retourner le programme si on lui donne l'input $[100, 0, -1]$?
2. Supposons qu'un programme résoud le problème suivant.
   input : Un tableau $A[1..n]$ de n nombres.
   output : Deux indices i et j tels que $1 \leq i \leq j \leq n$ et la différence $A[j] - A[i]$ est maximisée.

   Quel output devrait retourner le programme si on lui donne l'input $[100, 0, -1]$?
3. Supposons qu'un programme résoud le problème suivant.
   input : Un tableau $A[1..n]$ de n nombres.
   output : Deux indices i et j tels que $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ et la différence $A[j] - A[i]$ est maximisée.

   Quel output devrait retourner le programme si on lui donne l'input $[100, 0, -1]$?
4. Supposons qu'un programme résoud le problème suivant.
   input : Un tableau $A[1..n]$ de n nombres.
   output : Deux indices i et j tels que $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, $i \neq j$ et la différence $A[j] - A[i]$ est maximisée.

   Quel output devrait retourner le programme si on lui donne l'input $[100, 0, -1]$?
5. Répondre aux questions 1 à 4 en changeant « maximisée » par « minimisée ».

—— Règles d'inférence ——

6. Est-ce que le raisonnement suivant est valide ? Expliquer pourquoi. Soit

   P : Si George n'a pas huit pattes, alors il n'est pas une araignée.
   Q : George est une araignée.

$$\begin{array}{c} P \\ Q \\ \hline \text{George a huit pattes.} \end{array}$$

7. Est-ce que les hypothèses ≪ S'il ne pleut pas ou s'il n'y a pas de brouillard, alors la course à la voile aura lieu, et donc le trophée sera attribué, ≫ et ≪ le trophée n'a pas été attribué, ≫ impliquent la conclusion ≪ il a plu ≫ ? Expliquer pourquoi.
8. Écrire chacun des arguments suivants en utilisant la notation des règles d'inférence. Dire si le raisonnement est valide et expliquer pourquoi.
   (a) Daniel, un étudiant dans cette classe, sait comment écrire des programmes en Java. Tous ceux qui savent écrire des programmes en Java peuvent obtenir un travail bien rémunéré. Par conséquent, une personne dans cette classe peut obtenir un emploi bien rémunéré.
   (b) Quelqu'un dans cette classe aime l'observation des baleines. Toute personne qui aime l'observation des baleines se soucie de la pollution des océans. Par conséquent, il y a quelqu'un dans cette classe qui se soucie de la pollution des océans.

—— Preuves ——

Pour chacun des énoncés suivants,

— Écrire l'énoncé en utilisant les quantificateurs et les opérateurs logiques.
— Déterminer si l'énoncé est vrai ou faux.
— Démontrer que votre réponse est correcte.
— Indiquer la méthode de preuve utilisée.

9. Chaque entier impair correspond à la différence de deux carrés.
10. (a) Chaque entier pair correspond à la différence de deux carrés.
    (b) Chaque entier pair correspond à la différence de deux carrés différents.
11. Si n est un entier et que $n^3 + 5$ est impair, alors n est pair.
12. Au moins dix jours de n'importe quels 64 jours de l'année 2020 doivent tomber sur le même jour de la semaine.
13. Il existe une année du calendrier qui compte treize ≪ Vendredi 13 ≫.
14. Soit x un nombre entier. Si $3x + 2$ est pair, alors $x + 5$ est impair.
15. Soit x un nombre entier. Si $x + 5$ est impair, alors x^2 est pair.
16. Soit x un nombre entier. Si x^2 est pair, alors $3x + 2$ est pair.
17. Le nombre $\sqrt{5}$ est irrationnel.
18. Le nombre $\sqrt[3]{2}$ est irrationnel.
19. Le nombre $\log_2(3)$ est irrationnel.
20. Si $a > 0$ et b sont deux nombres rationnels, alors a^b est un nombre rationnel.

21. Si n est un entier non négatif, on a

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

22. Si n est un entier non négatif, on a

$$\sum_{i=0}^{n} (2i+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}.$$

23. Si n est un entier non négatif, on a

$$\sum_{i=0}^{n} 3 \cdot 5^i = \frac{3(5^{n+1}-1)}{4}.$$

24. Si n est un entier plus grand que 3, on a $2^n > n^2$.
25. Si n est un entier non négatif, alors $n^3 - n$ est divisible par 3.
26. Si n est un entier non négatif, on a

$$\sum_{i=0}^{n} i \cdot 2^i = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

—— Deux dernières questions ——

27. Soit $P(n)$ une forme propositionnelle. Déterminer pour quels entiers positifs n la poposition $P(n)$ doit être vraie dans chacun des cas suivants.
    (a) $P(1)$ est vrai et, pour tout entiers positifs n, $P(n) \to P(n+2)$.
    (b) $(P(1) \wedge P(2))$ est vrai et, pour tout entiers positifs n, $(P(n) \wedge P(n+1)) \to P(n+2)$.
    (c) $P(1)$ est vrai et, pour tout entiers positifs n, $P(n) \to P(2n)$.
    (d) $P(1)$ est vrai et, pour tout entiers positifs n, $P(n) \to P(n+1)$.
28. Quel est le problème avec cette « preuve » que tous les chevaux sont de la même couleur ?

    Soit $P(n) =$ "tous les chevaux de n'importe quel groupe de n chevaux sont de la même couleur."

    Étape de base : Clairement, $P(1)$ est vrai.

Hypothèse d'induction : Soit $k \geq 1$ et supposons que $P(k)$ est vrai. Autrement dit, tous les chevaux de n'importe quel ensemble de k chevaux sont de la même couleur.

Étape d'induction : Considérons $k+1$ chevaux : numérotez-les chevaux $1, 2, 3, ..., k, k+1$. Si on considère seulement les k premiers chevaux, on a donc un groupe de k chevaux. Par l'hypothèse d'induction, ils sont tous de la même couleur. Si on considère seulement les k derniers chevaux, on a donc un groupe de k chevaux. Par l'hypothèse d'induction, ils sont, eux aussi, tous de la même couleur. Mais comme les k premiers chevaux et les k derniers chevaux ont des chevaux en commun, alors les $k + 1$ chevaux sont de la même couleur !