Section 4.1

1. Supposons que a et b sont des entiers, $a \equiv 4 \pmod{13}$ et $b \equiv 9 \pmod{13}$. Trouver le nombre entier c où $0 \leq c \leq 12$ tel que
   (a) $c = 9a \pmod{13}$
   (b) $c = 2a + 3b \pmod{13}$
   (c) $c = a^3 - b^3 \pmod{13}$
2. Trouvez a **div** m et a **mod** m lorsque
   (a) $a = 228$ et $m = 119$.
   (b) $a = 9009$ et $m = 223$.
   (c) $a = -10101$ et $m = 333$.
3. Trouvez l'entier a tel que
   (a) $a \equiv 24 \pmod{31}$ et $-15 \leq a \leq 15$.
   (b) $a \equiv 99 \pmod{41}$ et $100 \leq a \leq 140$.
4. Trouver l'ensemble de toutes les valeurs de $\mathbb{Z}_m$ qui satisfont les équations suivantes.
   (a) $x \equiv -1 \pmod{6}$
   (b) $3x \equiv 4 \pmod{17}$
   (c) $2x + 7 \equiv 4x \pmod{27}$
   (d) $3x^2 + 5x \equiv 8 \pmod{4}$
5. Trouver un inverse multiplicatif à 4 dans $\mathbb{Z}_m$ pour $5 \leq m \leq 12$. Si un tel inverse n'existe pas, démontrer qu'il n'en existe pas.
6. (a) Énoncer un critère de divisibilité par 2 et démontrer qu'il fonctionne.
   (b) Énoncer un critère de divisibilité par 3 et démontrer qu'il fonctionne.
   (c) Énoncer un critère de divisibilité par 4 et démontrer qu'il fonctionne.
   (d) Énoncer un critère de divisibilité par 5 et démontrer qu'il fonctionne.
   (e) Énoncer un critère de divisibilité par 7 et démontrer qu'il fonctionne.
   (f) Énoncer un critère de divisibilité par 9 et démontrer qu'il fonctionne.
   (g) Énoncer un critère de divisibilité par 10 et démontrer qu'il fonctionne.
   (h) Énoncer un critère de divisibilité par 11 et démontrer qu'il fonctionne.

Pour chacun des énoncés suivants,

- Écrire l'énoncé en utilisant les quantificateurs et les opérateurs logiques.
- Déterminer si l'énoncé est vrai ou faux.
- Démontrer que votre réponse est correcte.
- Indiquer la méthode de preuve utilisée.

7. Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ avec $a \neq 0$. Si $a|b$ et $a|c$, alors $a|(b+c)$.
8. Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ avec $a \neq 0$. Si $a|(b+c)$, alors $a|b$ et $a|c$.
9. Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ avec $a \neq 0$. Si pour tout entier c, $a|bc$, alors $a|b$.
10. Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ avec $a \neq 0$. Si $a|b$, alors $a|bc$ pour tout entier c.
11. Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ avec $a \neq 0$. Si $a|bc$, alors $a|b$.
12. Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ avec $a \neq 0$. S'il existe un entier c tel que $a|bc$, alors $a|b$.
13. Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ avec $a \neq 0$. Si $a|c$, alors $a|b$ et $b|c$.
14. Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ avec $a \neq 0$. Si $a|c$, alors il existe un entier b tel que $a|b$ et $b|c$.
15. Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ avec $a \neq 0$. Si $a|c$, alors pour tout entier b, $a|b$ et $b|c$.
16. Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ avec $a \neq 0$. Si $a|b$ et $b|c$, alors $a|c$.
17. Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ avec $a \neq 0$. Si $a|(m \cdot b + n \cdot c)$ pour tout entiers m et n, alors $a|b$ et $a|c$.
18. Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ avec $a \neq 0$. S'il existe des entiers m et n tels que $a|(m \cdot b + n \cdot c)$, alors $a|b$ et $a|c$.
19. Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. Si $a^2 \equiv b^2 \pmod{m}$, alors $a \equiv b \pmod{m}$.
20. Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. Si $a \equiv b \pmod{m}$, alors $a^2 \equiv b^2 \pmod{m}$.
21. Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}_m$ tels que $ab \equiv 1 \pmod{m}$ et $ac \equiv 1 \pmod{m}$. Alors $b \equiv c \pmod{m}$.
22. Démontrer les propriétés de clôture, d'associativité, de commutativité, d'identité, d'inverses additifs et de distributivité de $+_m$ et $\cdot_m$ dans $\mathbb{Z}_m$.