Section 4.3

1. Trouvez la factorisation en nombres premiers de chacun de ces nombres entiers.
   (a) 88
   (b) 729
   (c) 1001
   (d) 909090
2. Quels nombres entiers positifs plus petit que 30 sont copremiers avec 30 ?
3. À l'aide d'un ordinateur, calculer le nombre de nombres premiers plus petit que 2020.
4. Pour chaque paire d'entier, déterminer le plus grand commun diviseur.
   (a) $a = 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7^3$
   $b = 2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5^9$
   (b) $a = 11 \cdot 13 \cdot 17$
   $b = 2^9 \cdot 3^7 \cdot 5^5 \cdot 7^3$
   (c) $a = 23^{31}$
   $b = 23^{17}$
   (d) $a = 41 \cdot 43 \cdot 53$
   $b = 41 \cdot 43 \cdot 53$
   (e) $a = 3^{13} \cdot 5^{17}$
   $b = 2^{12} \cdot 7^{21}$
5. Si le produit de deux entiers est $2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^2 \cdot 7^{11}$ et que leur plus grand commun diviseur est $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5$, quel est leur plus petit multiple commun ?
6. Utilisez l'algorithme d'Euclide pour trouver
   (a) $\text{pgcd}(1, 5)$
   (b) $\text{pgcd}(100, 101)$
   (c) $\text{pgcd}(123, 277)$
   (d) $\text{pgcd}(1529, 14039)$
   (e) $\text{pgcd}(1529, 14038)$
   (f) $\text{pgcd}(11111, 11111)$
7. Trouver deux entiers s et t tels que
   (a) $3s + 4t = 1$
   (b) $1534s + 2020t = 1608$
   (c) $25s + 36t = 3$
   (d) $17s + 31t = 1$

Pour chacun des énoncés suivants,

— Écrire l'énoncé en utilisant les quantificateurs et les opérateurs logiques.

— Déterminer si l'énoncé est vrai ou faux.

— Démontrer que votre réponse est correcte.

— Indiquer la méthode de preuve utilisée.

8. Soit $n > 1$ un entier. Si n n'est pas premier, alors n a un diviseur premier p tel que $p \leq \sqrt{n}$.
9. Soit $n > 1$ un entier. Si n a un diviseur premier p tel que $p \leq \sqrt{n}$, alors n n'est pas premier.
10. Soit des entiers a, b, q, r tels que $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r)$. Alors $a = bq + r$.
11. Soit des entiers a, b, q, r tels que $a = bq + r$. Alors $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r)$.
12. Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ avec $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$. Si $\text{pgcd}(a, bc) = 1$, alors $\text{pgcd}(a, b) = 1$ et $\text{pgcd}(a, c) = 1$.
13. Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ des entiers positifs. Si $\text{pgcd}(a, b) = 1$ et $a|bc$, alors $a|c$.
14. Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ des entiers positifs. Si $\text{pgcd}(a, b) = d$, alors $\text{pgcd}(a^2, b^2) = d^2$.
15. Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ des entiers positifs. Si $\text{pgcd}(a, b) = 1$ et $a|c$, alors $a|bc$.
16. Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ et un entier $m \geq 2$. Si $a \equiv b \pmod{m}$ et $a \cdot c \equiv b \cdot c \pmod{m}$, alors $\text{pgcd}(c, m) = 1$.