Ensuite, on a besoin d'une solution (17)
particulière pour

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 7^n$$

Comme $F(n) = 7^n$ est exponentielle, essayons une solution de la forme

$$a_n^{(p)} = c \cdot 7^n$$

On obtient

$$c \cdot 7^n = 5 \cdot c \cdot 7^{n-1} - 6 \cdot c \cdot 7^{n-2} + 7^n$$

$$49 \cdot c \cdot 7^{n-2} = 35 \cdot c \cdot 7^{n-2} - 6 \cdot c \cdot 7^{n-2} + 49 \cdot 7^{n-2}$$

$$49c = 35c - 6c + 49$$

$$c = 49/20$$

Donc $a_n^{(p)} = \frac{49}{20} \cdot 7^n$

Donc $a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)}$

$$= \frac{49}{20} \cdot 7^n + \alpha_1 \cdot 2^n + \alpha_2 \cdot 3^n$$

$$0 = a_0 = \frac{49}{20} \cdot 7^0 + \alpha_1 \cdot 2^0 + \alpha_2 \cdot 3^0$$

$$= \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{49}{20}$$

$$0 = a_1 = \frac{49}{20} \cdot 7^1 + \alpha_1 \cdot 2^1 + \alpha_2 \cdot 3^1$$

$$= 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \frac{343}{20}$$

Donc $\alpha_1 = 49/5$

$\alpha_2 = -49/4$

$$a_n = \frac{49}{20} \cdot 7^n + \frac{49}{5} \cdot 2^n - \frac{49}{4} \cdot 3^n$$

Plutôt que de "deviner" la forme de la solution particulière, on peut utiliser le théorème suivant.

CSI - 2501 Structures Discrètes
Cours 20

Jean-Lou De Carufel

Été 2020

Theorem

Soit

$$a_n = c_1\, a_{n-1} + c_2\, a_{n-2} + ... + c_k\, a_{n-k} + F(n),$$

où $c_1, c_2, ..., c_k \in \mathbb{R}$ *avec* $c_k \neq 0$ *et*

$$F(n) = \big(b_t\, n^t + b_{t-1}\, n^{t-1} + \ldots + b_1\, n + b_0\big) s^n,$$

où $b_0, b_1, ..., b_t, s \in \mathbb{R}$ *avec* $b_t \neq 0$ *et* $s \neq 0$.

- *Supposons que* s *n'est pas une racine de l'équation caractéristique de la récurrence linéaire homogène associée. Alors il y a une solution particulière* $a_n^{(p)}$ *de la forme*

$$\big(p_t\, n^t + p_{t-1}\, n^{t-1} + \ldots + p_1\, n + p_0\big) s^n.$$

- *Sinon,* s *est une racine de l'équation caractéristique de la récurrence linéaire homogène associée. Supposons que* s *est de multiplicité* m*. Alors il y a une solution particulière* $a_n^{(p)}$ *de la forme*

$$n^m \big(p_t\, n^t + p_{t-1}\, n^{t-1} + \ldots + p_1\, n + p_0\big) s^n.$$

Exemple

$$a_n = 5a_{n-1} - 8a_{n-2} + 4a_{n-3} + (n^2 + 1)2^n$$
$$a_0 = 0$$
$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 2$$

Cette récurrence est linéaire non-homogène d'ordre $k = 3$. Pour la résoudre, on a besoin de la solution $a_n^{(h)}$ à la récurrence linéaire homogène associée :

$$a_n = 5a_{n-1} - 8a_{n-2} + 4a_{n-3}$$

On sait maintenant comment procéder, on trouve

$$a_n^{(h)} = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 2^n + \alpha_3 \cdot n \cdot 2^n,$$

où α_1, α_2 et α_3 sont des constantes.

Pour trouver une solution particulière $a_n^{(p)}$, on utilise le théorème précédent. Pour appliquer ce théorème, nous avons besoin des racines de l'équation caractéristique de la récurrence linéaire homogène associée :

$$r^3 - 5r^2 + 8r - 4 = (r-1)(r-2)^2$$

Donc $s = 2$ est une racine de multiplicité $m = 2$. Donc, par le théorème, il y a une solution particulière $a_n^{(p)}$ de la forme

$$a_n^{(p)} = n^2 \cdot (p_2 \cdot n^2 + p_1 \cdot n + p_0)\, 2^n,$$

pour des constantes p_0, p_1 et p_2.

On obtient

$$
\begin{aligned}
n^2(p_2 n^2 + p_1 n + p_0)2^n = \; & 5(n-1)^2\Big(p_2(n-1)^2 + p_1(n-1) + p_0\Big)2^{n-1} \\
& - 8(n-2)^2\Big(p_2(n-2)^2 + p_1(n-2) + p_0\Big)2^{n-2} \\
& + 4(n-3)^2\Big(p_2(n-3)^2 + p_1(n-3) + p_0\Big)2^{n-3} \\
& + (n^2+1)2^n
\end{aligned}
$$

On divise par 2^n des deux côtés de l'égalité. Après simplification, on trouve

$$
p_2 n^4 + p_1 n^3 + p_0 n^2 = p_2 n^4 + p_1 n^3 + (-6p_2 + p_0 + 1)n^2 - 3p_1 n + (11p_2 - p_0 + 1)
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
p_0 &= -6p_2 + p_0 + 1 \\
0 &= -3p_1 \\
0 &= 11p_2 - p_0 + 1
\end{aligned}
$$

Puis on trouve

$$p_0 = \frac{17}{6} \qquad p_1 = 0 \qquad p_2 = \frac{1}{6}$$

Donc

$$a_n^{(p)} = n^2 \left(\frac{1}{6} n^2 + \frac{17}{6} \right) 2^n$$

Donc

$$\begin{aligned} a_n &= a_n^{(p)} + a_n^{(h)} \\ &= n^2 \left(\frac{1}{6} n^2 + \frac{17}{6} \right) 2^n + \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 2^n + \alpha_3 \cdot n \cdot 2^n \end{aligned}$$

Il reste à trouver les valeurs de α_1, α_2 et α_3 pour satisfaire les conditions initiales.

On a

$$0 = a_0 = 0^2 \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot 0^2 + \frac{17}{6}\right) 2^0 + \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 2^0 + \alpha_3 \cdot 0 \cdot 2^0 = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$1 = a_1 = 1^2 \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot 1^2 + \frac{17}{6}\right) 2^1 + \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 2^1 + \alpha_3 \cdot 1 \cdot 2^1 = 6 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3$$

$$2 = a_2 = 2^2 \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot 2^2 + \frac{17}{6}\right) 2^2 + \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 2^2 + \alpha_3 \cdot 1 \cdot 2^2 = 56 + \alpha_1 + 4\alpha_2 + 8\alpha_3$$

Donc

$$\alpha_1 = -34 \qquad \alpha_2 = 34 \qquad \alpha_3 = -\frac{39}{2}$$

Donc la solution finale est

$$\begin{aligned} a_n &= n^2 \left(\frac{1}{6} n^2 + \frac{17}{6}\right) 2^n - 34 + 34 \cdot 2^n - \frac{39}{2} \cdot n \cdot 2^n \\ &= \frac{1}{6} \left(n^4 + 17n^2 - 117n + 204\right) 2^n - 34 \end{aligned}$$