CSI-2101 Discrete Structures (Été 2020)
~~Mini-Test~~ Devoir #4

- DEADLINE : Jeudi 16 juillet 2020 à midi
- **Le deadline est strict. Il n'y a que deux questions. Aucun retard ne sera toléré.**
- À SOUMETTRE SUR BRIGHTSPACE. Vous devez soumettre un seul fichier pdf sur BrightSpace.

1. (10 pts) Pour cette question, vous aurez besoin de votre numéro d'étudiant.

   (a) (0 pt) Quel est votre numéro d'étudiant ?

   Soit t le dernier chiffre de votre numéro d'étudiant. Considérer l'équation de récurrence linéaire non-homogène suivante (où vous devez remplacer t par le dernier chiffre de votre numéro d'étudiant) :

$$\begin{aligned} a_n &= -a_{n-1} + 6a_{n-2} + 125(t+1)\cdot(n+1)\cdot 2^n \\ a_0 &= 0 \\ a_1 &= 0 \end{aligned}$$

   (b) (2 pt) Trouver la solution $a_n^{(h)}$ à la récurrence linéaire homogène associée.

   Solution : La récurrence linéaire homogène associée est

$$a_n = -a_{n-1} + 6a_{n-2}.$$

   L'équation caractéristique est donc $x^2+x-6 = (x-2)(x+3)$. Donc, d'après le théorème vu en classe, on a

$$a_n^{(h)} = \alpha_1 \cdot 2^n + \alpha_2 \cdot (-3)^n,$$

   pour des constantes α_1 et α_2.

   (c) (6 pts) Trouver une solution particulière $a_n^{(p)}$ à la récurrence linéaire non-homogène. Je vous suggère fortement d'utiliser le théorème du cours 19.

   Solution : Dans la solution qui suit, remplacez t par le dernier chiffre de votre numéro d'étudiant et vous en déduirez votre solution personnalisée !
   Comme 2 est une racine de multiplicité $m = 1$ de l'équation caractéristique, d'après le théorème vu en classe (virtuelle), il y a une solution particulière de la forme

$$a_n^{(p)} = n^1\left(p_1 n^1 + p_0\right)2^n = n\left(p_1 n + p_0\right)2^n,$$

   pour des constantes p_0 et p_1.

Remplaçons dans la récurrence pour trouver les valeurs de p_0 et p_1. La récurrence

$$a_n = -a_{n-1} + 6a_{n-2} + 125(t+1)\cdot(n+1)\cdot 2^n$$

devient

$$n\Big(p_1 n + p_0\Big)\,2^n = -(n-1)\Big(p_1(n-1)+p_0\Big)\,2^{n-1} + 6(n-2)\Big(p_1(n-2)+p_0\Big)\,2^{n-2} + 125(t+1)\cdot(n+1)\cdot 2^n.$$

On divise par 2^{n-2} des deux côtés de l'égalité et on trouve

$$4n\Big(p_1 n + p_0\Big) = -2(n-1)\Big(p_1(n-1)+p_0\Big) + 6(n-2)\Big(p_1(n-2)+p_0\Big) + 500(t+1)\cdot(n+1).$$

En développant les termes de chaque côté de l'égalité, on trouve

$$4p_1n^2 + 4p_0n = 4p_1n^2 + \Big(500(t+1) + 4p_0 - 20p_1\Big)n + \Big(500(t+1) - 10p_0 + 22p_1\Big).$$

On doit donc résoudre

$$\begin{aligned} 4p_1 &= 4p_1 \\ 4p_0 &= 500(t+1) + 4p_0 - 20p_1 \\ 0 &= 500(t+1) - 10p_0 + 22p_1. \end{aligned}$$

On trouve

$$p_0 = 105(t+1), \qquad\qquad p_1 = 25(t+1).$$

Donc on a

$$a_n^{(p)} = n\Big(25(t+1)n + 105(t+1)\Big)\,2^n.$$

(d) (2 pts) Trouver la solution générale à la récurrence linéaire non-homogène.

Solution : Dans la solution qui suit, remplacez t par le dernier chiffre de votre numéro d'étudiant et vous en déduirez votre solution personnalisée !

Par le théorème vu en classe, la solution générale est

$$\begin{aligned} a_n &= a_n^{(h)} + a_n^{(p)} \\ &= \alpha_1\cdot 2^n + \alpha_2\cdot(-3)^n + n\Big(25(t+1)n + 105(t+1)\Big)\,2^n, \end{aligned}$$

pour des constantes α_1 et α_2.

On trouve les valeurs de α_1 et α_2 en considérant les conditions initiales. On doit résoudre

$$0 = a_0 = \alpha_1\cdot 2^0 + \alpha_2\cdot(-3)^0 + 0\cdot\Big(25(t+1)\cdot 0 + 105(t+1)\Big)\,2^0 = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$0 = a_1 = \alpha_1\cdot 2^1 + \alpha_2\cdot(-3)^1 + 1\cdot\Big(25(t+1)\cdot 1 + 105(t+1)\Big)\,2^1 = 2\alpha_1 - 3\alpha_2 + 260(t+1).$$

On trouve

$$\alpha_1 = -52(t+1), \qquad\qquad \alpha_2 = 52(t+1).$$

Donc on a

$$a_n = -52(t+1)\cdot 2^n + 52(t+1)\cdot(-3)^n + n\Big(25(t+1)n + 105(t+1)\Big)\,2^n.$$

Note : Vous devez fournir tous vos calculs et toutes les justifications pour les parties (b), (c) et (d).

2. (10 pts) Utiliser le Master Theorem pour résoudre la récurrence suivante.

$$f(n) = 8 \cdot f(n/2) + 2020 \cdot n^3 \qquad (n > 1)$$
$$f(1) = 1$$

Note : Vous devez fournir toutes les justifications.

SOLUTION : On a $a = 8$, $b = 2$, $c = 2020$ et $d = 3$. Donc on a $d = 3 = \log_2(8) = \log_b(a)$. Donc on est dans le deuxième cas du Master Theorem. Donc $f(n) = O\left(n^d \log(n)\right) = O\left(n^3 \log(n)\right)$.