Chapitre 1
Solutions

1. Il retournerait $i = 2$ et $j = 3$

   Attention ! On ne peut pas utiliser 100 comme premier terme car on doit avoir $i < j$.

3. Il retournerait $i = 3$ et $j = 1$

5. Dans tous les cas, il retournerait $i = 1$ et $j = 3$.
7. Voici la forme du raisonnement est la suivante.

$$\begin{array}{l} (\neg P \vee \neg B) \to (V \wedge T) \\ \neg T \\ \hline P \end{array}$$

   où

$$\begin{aligned} P &= \text{« Il pleut. »} \\ B &= \text{« Il y a du brouillard. »} \\ V &= \text{« La course à voile a lieu. »} \\ T &= \text{« Le trophée est attribué. »} \end{aligned}$$

   On veut donc savoir si $(\neg P \vee \neg B) \to (V \wedge T)$ et $\neg T$ impliquent P. La réponse est oui. Dans la table de vérité de

$$\big((\neg P \vee \neg B) \to (V \wedge T)\big) \wedge \neg T \to P,$$

   on trouve des « VRAI » à chaque ligne.
9. L'énoncé est de la forme

$$\forall x \; \exists y \; \exists z \; (x = y^2 - z^2),$$

   où le domaine de x est l'ensemble des entiers impairs, le domaine de y est l'ensemble des entiers et le domaine de z est l'ensemble des entiers.

   Cet énoncé est vrai. Voici une preuve directe.
   Soit x un entier impair quelconque. On a donc $x = 2k + 1$ pour un entier k. Donc

$$x = 2k + 1 = k^2 + 2k + 1 - k^2 = (k + 1)^2 - (k)^2$$

correspond à la différence de deux carrés.
On pourrait tout aussi bien dire que l'énoncé est de la forme

$$\forall x\ \big(x \textit{ est impair } \rightarrow\ \exists y\, \exists z\, (x = y^2 - z^2)\big)\,,$$

où le domaine de x*, de* y *et de* z *est l'ensemble des entiers. Ça ne changerait rien à la preuve.*

11. L'énoncé est de la forme

$$\forall n(I(n^3+5) \rightarrow \neg I(n)),$$

où le domaine de n est l'ensemble des entiers et $I(n) =$ « n est impair. »

Cet énoncé est vrai. Voici une preuve par contraposition.
Soit n un entier. On va montrer que $I(n) \rightarrow \neg I(n^3+5)$. Supposons n est impair, donc $n = 2k+1$ pour un entier k. On trouve

$$\begin{aligned}
&n^3+5\\
=&(2k+1)^3+5\\
=&(4k^2+4k+1)(2k+1)+5\\
=&(8k^3+12k^2+6k+1)+5\\
=&8k^3+12k^2+6k+6\\
=&2(4k^3+6k^2+3k+3)
\end{aligned}$$

qui est pair.

13. L'énoncé est de la forme

$$\exists A\ (A \text{ compte treize « Vendredi 13 ».}),$$

où le domaine de A est l'ensemble de toutes les années.

Cet énoncé est faux. Voici une preuve directe.
Il peut y avoir au plus un « Vendredi 13 » par mois. Il y a douze mois. Donc il ne peut pas y avoir plus de douze « Vendredi 13 » par année.

15. L'énoncé est de la forme

$$\forall x(I(x+5) \rightarrow \neg I(x^2)),$$

où le domaine de x est l'ensemble des entiers et $I(x) =$ « x est impair. »

Cet énoncé est vrai. Voici une preuve directe. Puisque $x+5$ est impair, alors $x+5 = 2k+1$ pour un entier k. On a donc

$$\begin{aligned}
x+5 &= 2k+1\\
x &= 2k-4\\
x^2 &= (2k-4)^2\\
x^2 &= 4k^2-16k+16\\
x^2 &= 2(k^2-8k+8)
\end{aligned}$$

qui est pair.

17. La forme de cet énoncé est une simple proposition

$$\text{Le nombre } \sqrt{5} \text{ est irrationnel.}$$

Cet énoncé est vrai. Voici une preuve par contradiction.

Supposons que $\sqrt{5}$ est rationnel. On a donc que

$$\sqrt{5} = \frac{a}{b}$$

pour des entier a et b tels que $b \neq 0$ et la fraction $\frac{a}{b}$ est réduite. Donc

$$\begin{aligned} \sqrt{5} &= \frac{a}{b} \\ 5 &= \frac{a^2}{b^2} \\ 5b^2 &= a^2 \end{aligned}$$

Donc a^2 est divisible par 5. Ceci implique que a est divisible par 5. (En classe on a montré que si a^2 est pair, alors a est pair. Ici, on utilise le fait que si a^2 est divisible par 5, alors a est divisible par 5. Vous devriez le prouver pour vous en convaincre...) Comme a est divisible par 5, on a $a = 5d$ pour un entier d. Donc

$$\begin{aligned} 5b^2 &= a^2 \\ 5b^2 &= (5d)^2 \\ 5b^2 &= 5^2 d^2 \\ b^2 &= 5d^2 \end{aligned}$$

Donc b^2 est divisible par 5. Ceci implique que b est divisible par 5.
On a trouvé 5 comme diviseur commun entre a et b, ce qui implique que la fraction $\frac{a}{b}$ n'est pas réduite. C'est une contradiction.

19. La forme de cet énoncé est une simple proposition

$$\text{Le nombre } \log_2(3) \text{ est irrationnel.}$$

Cet énoncé est vrai. Voici une preuve par contradiction.

Supposons que $\log_2(3)$ est rationnel. Comme $\log_2(3) > 1$, il existe deux entiers $p \geq 0$ et $q > 0$ tels que $\log_2(3) = \frac{p}{q}$. On obtient

$$\begin{aligned} \log_2(3) &= \frac{p}{q} \\ 3 &= 2^{p/q} \\ 3^q &= 2^p. \end{aligned}$$

Si $p \neq 0$, alors 2^p est pair. C'est impossible puisque 3^q est impair et $3^q = 2^p$. Donc $p = 0$. Mais alors $\log_2(3) = 0$, ce qui est une contradiction.

21. La forme de cet énoncé est

$$\forall n \left(\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right),$$

où le domaine de n est $\mathbf{N}$.

Cet énoncé est vrai. Voici une preuve par induction.

Cas de base : Pour $n = 0$,

$$0 = \frac{0 \cdot (0+1) \cdot (2 \cdot 0 + 1)}{6}.$$

Hypothèse d'induction : Soit $k \geq 0$. Supposons que

$$\sum_{i=0}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Étape d'induction : Pour $n = k+1$, on a

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{k+1} i^2 \\
&= \sum_{i=0}^{k} i^2 + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 && \text{hypothèse d'induction} \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\
&= \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\
&= \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}
\end{aligned}$$

23. La forme de cet énoncé est

$$\forall n \left(\sum_{i=0}^{n} 3 \cdot 5^i = \frac{3(5^{n+1} - 1)}{4} \right),$$

où le domaine de n est $\mathbf{N}$.
Cet énoncé est vrai. Voici une preuve par induction.

Cas de base : Pour $n = 0$,

$$3 \cdot 5^0 = 3 = \frac{3(5^{0+1} - 1)}{4}.$$

Hypothèse d'induction : Soit $k \geq 0$. Supposons que

$$\sum_{i=0}^{k} 3 \cdot 5^i = \frac{3(5^{k+1} - 1)}{4}.$$

Étape d'induction : Pour $n = k + 1$, on a

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{k+1} 3 \cdot 5^i \\
=&\sum_{i=0}^{k} 3 \cdot 5^i + 3 \cdot 5^{k+1} \\
=&\frac{3(5^{k+1} - 1)}{4} + 3 \cdot 5^{k+1} && \text{hypothèse d'induction} \\
=&\frac{3(5^{k+1} - 1) + 4 \cdot 3 \cdot 5^{k+1}}{4} \\
=&\frac{3 \cdot 5^{k+1} + 12 \cdot 5^{k+1} - 3}{4} \\
=&\frac{15 \cdot 5^{k+1} - 3}{4} \\
=&\frac{3 \cdot 5^{k+2} - 3}{4} \\
=&\frac{3 \cdot \left(5^{(k+1)+1} - 1\right)}{4}
\end{aligned}$$

Voici une autre preuve complètement différente. C'est une preuve directe. Écrivons d'abord la somme sous la forme d'une somme s. Soit

$$s = \sum_{i=0}^{n} 3 \cdot 5^i = 3(1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^n).$$

On trouve donc

$$\frac{s}{3} = 1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^n,$$

d'où

$$\frac{s}{3} - 1 = 5 + 5^2 + \cdots + 5^n = 5 \cdot \left(1 + 5 + \cdots + 5^{n-1}\right) = 5 \cdot \left(\frac{s}{3} - 5^n\right)$$

On a alors une équation qui nous permet d'isoler une expression pour s :

$$\begin{aligned}
\frac{s}{3} - 1 &= 5 \cdot \left(\frac{s}{3} - 5^n\right) \\
\frac{s}{3} - 1 &= 5 \cdot \frac{s}{3} - 5^{n+1} \\
5^{n+1} - 1 &= 4 \cdot \frac{s}{3} \\
s &= \frac{3}{4}(5^{n+1} - 1).
\end{aligned}$$

25. Cet énoncé est de la forme

$$\forall n(n^3 - n \text{ est divisible par } 3),$$

où le domaine de n est $\mathbb{N}$.

Cet énoncé est vrai. Voici une preuve par induction.

Cas de base : Pour $n = 0$,

$$0^3 - 0 = 0 = 3 \cdot 0$$

est divisible par 3.

Hypothèse d'induction : Soit $k \geq 0$. Supposons que $k^3 - k$ est divisible par 3.

Étape d'induction : Par l'hypothèse d'induction, $k^3 - k$ est divisible par 3. Donc $k^3 - k = 3\ell$ pour un entier ℓ.

Pour $n = k + 1$, on a donc que

$$(k+1)^3 - (k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 = (k^3 - k) + (3k^2 + 3k) = 3\ell + 3(k^2 + k) = 3(\ell + k^2 + k)$$

est divisible par 3.

Voici une autre preuve complètement différente. C'est une preuve directe. On a

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n + 1)(n - 1).$$

On considère trois cas : (i) $n = 3k$, (ii) $n = 3k + 1$, (iii) $n = 3k + 2$. (i) Si $n = 3k$ alors

$$\begin{aligned}
n^3 - n &= n(n + 1)(n - 1) \\
&= (3k)(3k + 1)(3k - 1) \\
&= 3 \cdot [k(3k + 1)(3k - 1)]
\end{aligned}$$

(ii) Si $n = 3k + 1$ alors

$$\begin{aligned}
n^3 - n &= n(n + 1)(n - 1) \\
&= (3k + 1)(3k + 2)(3k) \\
&= 3 \cdot [(3k + 1)(3k + 2)k]
\end{aligned}$$

(iii) Si $n = 3k + 2$ *alors*

$$\begin{aligned} n^3 - n &= n(n+1)(n-1) \\ &= (3k+2)(3k+3)(3k+1) \\ &= 3 \cdot [(3k+2)(k+1)(3k+1)] \end{aligned}$$

27. (a) P est vrai pour tout entiers impairs.
    (b) P est vrai pour tout entiers positifs.
    (c) P est vrai pour toutes les puissances de 2.
    (d) P est vrai pour tout entiers positifs.