Chapitre 4.3
Solutions

1.
   (a) $2^3 \cdot 11$
   (b) 3^6
   (c) $7 \cdot 11 \cdot 13$
   (d) $2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$

3.
   Voici un petit code Python pour y arriver.

```
primes = []
for n in range(2, 2020):
    for p in primes:
        if n % p == 0:
            break
    else:
        primes.append(n)
print(len(primes))
```

   Réponse : 306

5.
   On a deux entiers a, b tels que le produit $ab = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^2 \cdot 7^{11}$ et $\gcd(a, b) = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5$. Alors leur plus petit multiple commun est

$$\begin{aligned} \frac{ab}{\gcd(a,b)} &= \frac{2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^2 \cdot 7^{11}}{2^3 \cdot 3^4 \cdot 5} \\ &= 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^{11} \end{aligned}$$

7.
   (a) $3s + 4t = 1$

$$\begin{aligned} 4 &= 3 \cdot 1 + 1 \\ 3 &= 1 \cdot 3 + 0 \\ 1 &= 4 - 3 \\ 1 &= 4 \cdot (1) + 3 \cdot (-1) \end{aligned}$$

   $s = -1, t = 1$

(b) $1534s + 2020t = 1608$
$767s + 1010t = 804$

$$
\begin{aligned}
1010 &= 767 \cdot 1 + 243 \\
767 &= 243 \cdot 3 + 38 \\
243 &= 38 \cdot 6 + 15 \\
38 &= 15 \cdot 2 + 8 \\
15 &= 8 \cdot 1 + 7 \\
8 &= 7 \cdot 1 + 1 \\
7 &= 1 \cdot 7 + 0 \\
1 &= 8 - 7 \\
1 &= (38 - 15 \cdot 2) - (15 - 8) \\
1 &= 38 - 15 \cdot 3 + 8 \\
1 &= (767 - 243 \cdot 3) - (243 - 38 \cdot 6) \cdot 3 + (38 - 15 \cdot 2) \\
1 &= 767 - 243 \cdot 3 - 243 \cdot 3 + 38 \cdot 18 + 38 - 15 \cdot 2 \\
1 &= 767 - 243 \cdot 6 + 38 \cdot 19 - 15 \cdot 2 \\
1 &= 767 - (1010 - 767) \cdot 6 + (767 - 243 \cdot 3) \cdot 19 - (243 - 38 \cdot 6) \cdot 2 \\
1 &= 767 - 1010 \cdot 6 + 767 \cdot 6 + 767 \cdot 19 - 243 \cdot 57 - 243 \cdot 2 + 38 \cdot 12 \\
1 &= -1010 \cdot 6 + 767 \cdot 26 - 243 \cdot 59 + 38 \cdot 12 \\
1 &= -1010 \cdot 6 + 767 \cdot 26 - (1010 - 767) \cdot 59 + (767 - 243 \cdot 3) \cdot 12 \\
1 &= -1010 \cdot 6 + 767 \cdot 26 - 1010 \cdot 59 + 767 \cdot 59 + 767 \cdot 12 - 243 \cdot 36 \\
1 &= -1010 \cdot 65 + 767 \cdot 97 - 243 \cdot 36 \\
1 &= -1010 \cdot 65 + 767 \cdot 97 - (1010 - 767) \cdot 36 \\
1 &= -1010 \cdot 65 + 767 \cdot 97 - 1010 \cdot 36 + 767 \cdot 36 \\
1 &= -1010 \cdot 101 + 767 \cdot 133 \\
1 &= 1010 \cdot (-101) + 767 \cdot (133) \\
804 &= 1010 \cdot (-101 \cdot 804) + 767 \cdot (133 \cdot 804) \\
804 &= 1010 \cdot (-81204) + 767 \cdot (106932) \\
1608 &= 2020 \cdot (-81204) + 1534 \cdot (106932)
\end{aligned}
$$

$s = 106932, t = -81204$

(c) $25s + 36t = 3$

$$\begin{aligned}
36 &= 25 \cdot 1 + 11 \\
25 &= 11 \cdot 2 + 3 \\
11 &= 3 \cdot 3 + 2 \\
3 &= 2 \cdot 1 + 1 \\
2 &= 1 \cdot 2 + 0 \\
1 &= 3 - 2 \\
1 &= (25 - 11 \cdot 2) - (11 - 3 \cdot 3) \\
1 &= 25 - 11 \cdot 2 - 11 + 3 \cdot 3 \\
1 &= 25 - 11 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \\
1 &= 25 - (36 - 25) \cdot 3 + (25 - 11 \cdot 2) \cdot 3 \\
1 &= 25 \cdot 7 - 36 \cdot 3 - 11 \cdot 6 \\
1 &= 25 \cdot 7 - 36 \cdot 3 - (36 - 25) \cdot 6 \\
1 &= 25 \cdot 7 - 36 \cdot 3 - 36 \cdot 6 + 25 \cdot 6 \\
1 &= 25 \cdot 13 - 36 \cdot 9 \\
1 &= 25 \cdot 13 + 36 \cdot -9 \\
3 &= 25 \cdot (39) + 36 \cdot (-27)
\end{aligned}$$

$s = 39, t = -27$

(d) $17s + 31t = 1$

$$\begin{aligned}
31 &= 17 \cdot 1 + 14\\
17 &= 14 \cdot 1 + 3\\
14 &= 3 \cdot 4 + 2\\
3 &= 2 \cdot 1 + 1\\
2 &= 1 \cdot 2 + 0\\
1 &= 3 - 2\\
1 &= (17 - 14) - (14 - 3 \cdot 4)\\
1 &= 17 - 14 - 14 + 3 \cdot 4\\
1 &= 17 - 14 \cdot 2 + 3 \cdot 4\\
1 &= 17 - (31 - 17) \cdot 2 + (17 - 14) \cdot 4\\
1 &= 17 - 31 \cdot 2 + 17 \cdot 2 + 17 \cdot 4 - 14 \cdot 4\\
1 &= 17 \cdot 7 - 31 \cdot 2 - 14 \cdot 4\\
1 &= 17 \cdot 7 - 31 \cdot 2 - (31 - 17) \cdot 4\\
1 &= 17 \cdot 7 - 31 \cdot 2 - 31 \cdot 4 + 17 \cdot 4\\
1 &= 17 \cdot 11 + (31) \cdot (-6)
\end{aligned}$$

$s = 11, t = -6$

9.

L'énoncé est de la forme

$$\forall n\Big(\exists p\big(p|n \wedge P(p) \wedge p \leq \sqrt{n}\big) \rightarrow \neg P(n)\Big),$$

où le domaine de n est l'ensemble des entiers plus grands que 1, le domaine de p est l'ensemble des entiers positifs et $P(n) =$ « n est premier ».

L'énoncé est vrai, voici une preuve directe.

Soit $n \geq 1$ un entier. Supposons qu'il existe un nombre premier p tel que $p|n$ et $p \leq \sqrt{n}$.

Comme p est premier, alors $p \geq 2$. Donc p divise n et $2 \leq p \leq \sqrt{n}$. Donc n est divisible par un nombre différent de 1 et de lui-même. Donc n admet plus de deux diviseurs. donc n n'est pas premier.

11.

L'énoncé est de la forme

$$\forall a \forall b \forall q \forall r\ (a = bq + r \rightarrow \mathrm{pgcd}(a, b) = \mathrm{pgcd}(b, r))$$

où le domaine de a, b, q er r est $\mathbb{Z}$.

L'énoncé est vrai, voici une preuve directe : lemme vu en classe !

13.

L'énoncé est de la forme

$$\forall a \forall b \forall c\ ((\mathrm{pgcd}(a,b)=1) \wedge a|bc \rightarrow a|c)$$

où le domaine de a, b et c est l'ensemble des entiers positifs.

L'énoncé est vrai, voici une preuve directe : lemme vu en classe !

15.

L'énoncé est de la forme

$$\forall a \forall b \forall c\ ((\mathrm{pgcd}(a,b)=1) \wedge a|c \rightarrow a|bc)$$

où le domaine de a, b et c est l'ensemble des entiers positifs.

L'énoncé est vrai, voici une preuve directe.

Soit a, b et c des entiers positifs. Supposons que $\mathrm{pgcd}(a,b)=1$ et que $a|c$. Par le théorème 1 (partie 2), on a $a|bc$.

Attention ! Dans cette preuve, on n'a pas besoin d'utiliser l'hypothèse « pgcd$(a,b)=1$ ». L'énoncé serait vrai même sans cette hypothèse !