Chapitre 8

1. (a) L'équation caractéristique est $r^2 - r - 6 = (r-3)(r+2)$. Donc la solution générale est
$$a_n = \alpha_1 \cdot 3^n + \alpha_2 \cdot (-2)^n.$$
On a
$$\begin{aligned} 0 &= a_0 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ 1 &= a_1 = 3\alpha_1 - 2\alpha_2. \end{aligned}$$
Donc $\alpha_1 = \frac{1}{5}$ et $\alpha_2 = -\frac{1}{5}$. Donc
$$a_n = \frac{1}{5} \cdot 3^n - \frac{1}{5} \cdot (-2)^n.$$

(b) L'équation caractéristique est $r^2 + 3r + 2 = (r+2)(r+1)$. Donc la solution générale est
$$a_n = \alpha_1 \cdot (-2)^n + \alpha_2 \cdot (-1)^n.$$
On a
$$\begin{aligned} 0 &= a_0 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ 1 &= a_1 = -2\alpha_1 - \alpha_2. \end{aligned}$$
Donc $\alpha_1 = -1$ et $\alpha_2 = 1$. Donc
$$a_n = -(-2)^n + (-1)^n.$$

(c) L'équation caractéristique est $r^2 + 5r - 6 = (r+6)(r-1)$. Donc la solution générale est
$$a_n = \alpha_1 \cdot (-6)^n + \alpha_2 \cdot 1^n = \alpha_1 \cdot (-6)^n + \alpha_2.$$
On a
$$\begin{aligned} 0 &= a_0 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ 1 &= a_1 = -6\alpha_1 + \alpha_2. \end{aligned}$$
Donc $\alpha_1 = -\frac{1}{7}$ et $\alpha_2 = \frac{1}{7}$. Donc
$$a_n = -\frac{1}{7} \cdot (-6)^n + \frac{1}{7}.$$

3. (a) L'équation caractéristique est $r^2 - 10r + 21 = (r-3)(r-7)$. Donc la solution générale est

$$a_n = \alpha_1 \cdot 3^n + \alpha_2 \cdot 7^n.$$

On a

$$\begin{aligned} 0 &= a_0 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ 1 &= a_1 = 3\alpha_1 + 7\alpha_2. \end{aligned}$$

Donc $\alpha_1 = -\frac{1}{4}$ et $\alpha_2 = \frac{1}{4}$. Donc

$$a_n = -\frac{1}{4} \cdot 3^n + \frac{1}{4} \cdot 7^n.$$

(b) L'équation caractéristique est $r^2 - 1 = (r+1)(r-1)$. Donc la solution générale est

$$a_n = \alpha_1 \cdot (-1)^n + \alpha_2 \cdot 1^n = \alpha_1 \cdot (-1)^n + \alpha_2.$$

On a

$$\begin{aligned} 0 &= a_0 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ 1 &= a_1 = -\alpha_1 + \alpha_2. \end{aligned}$$

Donc $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$ et $\alpha_2 = \frac{1}{2}$. Donc

$$a_n = -\frac{1}{2} \cdot (-1)^n + \frac{1}{2}.$$

(c) L'équation caractéristique est $r^2 - 6r + 9 = (r-3)(r-3)$. Donc la solution générale est

$$a_n = \alpha_1 \cdot 3^n + \alpha_2 n \cdot 3^n.$$

On a

$$\begin{aligned} 0 &= a_0 = \alpha_1 \\ 1 &= a_1 = 3\alpha_1 + 3\alpha_2. \end{aligned}$$

Donc $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = \frac{1}{3}$. Donc

$$a_n = \frac{1}{3} n \cdot 3^n.$$

5. Comme $r^2 - 2r = r(r-2)$, on obtient que les deux racines caractéristiques sont 0 et 2. Donc la solution homogène est de la forme

$$\alpha_1 \cdot 0^n + \alpha_2 \cdot 2^n = \alpha_2 \cdot 2^n.$$

7. En essayant quelques valeurs, on découvre que la suite des a_i nous donne

$$0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, ...$$

On peut facilement le prouver par induction (vous voulez essayer ?) On a trouvé la règle. C'est résolu.
En utilisant la méthode vue en classe, on n'a pas besoin de preuve par induction, mais on tombe sur des nombres complexes !
Le polynôme caractéristique est $r^2 + 1 = (r + \sqrt{-1})(r - \sqrt{-1}) = (r + I)(r - I)$. Donc la solution est

$$a_n = \alpha_1 \cdot I^n + \alpha_2 \cdot (-I)^n.$$

On a

$$\begin{aligned} 0 = a_0 &= \alpha_1 \cdot I^0 + \alpha_2 \cdot (-I)^0 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ 1 = a_1 &= \alpha_1 \cdot I^1 + \alpha_2 \cdot (-I)^1 = \alpha_1 \cdot I - \alpha_2 \cdot I \end{aligned}$$

Donc $\alpha_1 = -\frac{I}{2}$ et $\alpha_2 = \frac{I}{2}$.

$$a_n = -\frac{I}{2} \cdot I^n + \frac{I}{2} \cdot (-I)^n.$$

9. Résoudre les récurrences suivantes.
   (a) L'équation caractéristique de l'équation homogène associée est $r^2 + 3r + 2 = (r + 1)(r + 2)$. Donc la solution à l'équation homogène associée est

$$a_n^{(h)} = \alpha_1 \cdot (-1)^n + \alpha_2 \cdot (-2)^n.$$

Une solution particulière est de la forme $(p_1 n + p_0)2^n$ pour des constantes p_0 et p_1. On a

$$\begin{aligned} (p_1 n + p_0)2^n &= -3(p_1(n-1) + p_0)2^{n-1} - 2(p_1(n-2) + p_0)2^{n-2} + n2^n \\ 4(p_1 n + p_0) &= -6(p_1(n-1) + p_0) - 2(p_1(n-2) + p_0) + 4n, \end{aligned}$$

et donc

$$4p_1 n + 4p_0 = (4 - 8p_1)n + (-8p_0 + 10p_1),$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} 4p_1 &= 4 - 8p_1 \\ 4p_0 &= -8p_0 + 10p_1. \end{aligned}$$

On trouve $p_0 = \frac{5}{18}$ et $p_1 = \frac{1}{3}$. Donc

$$a_n^{(p)} = \left(\frac{1}{3}n + \frac{5}{18}\right) 2^n.$$

Donc
$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = \alpha_1 \cdot (-1)^n + \alpha_2 \cdot (-2)^n + \left(\frac{1}{3}n + \frac{5}{18}\right) 2^n.$$
On a
$$\begin{aligned}0 = a_0 &= \alpha_1 \cdot (-1)^0 + \alpha_2 \cdot (-2)^0 + \left(\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{5}{18}\right) 2^0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{5}{18}\\ 1 = a_1 &= \alpha_1 \cdot (-1)^1 + \alpha_2 \cdot (-2)^1 + \left(\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{5}{18}\right) 2^1 = -\alpha_1 - 2\alpha_2 + \frac{11}{9}\end{aligned}$$

Autrement dit
$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_2 &= -\frac{5}{18}\\ \alpha_1 + 2\alpha_2 &= \frac{2}{9}\end{aligned}$$
Donc $\alpha_1 = -\frac{7}{9}$ et $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, d'où la solution finale :
$$a_n = -\frac{7}{9} \cdot (-1)^n + \frac{1}{2} \cdot (-2)^n + \left(\frac{1}{3}n + \frac{5}{18}\right) 2^n.$$

(b) L'équation caractéristique de l'équation homogène associée est $r^3 - 6r^2 + 12r - 8 = (r-2)^3$. Donc la solution à l'équation homogène associée est
$$a_n^{(h)} = \alpha_1 \cdot 2^n + \alpha_2 \cdot n \cdot 2^n + \alpha_3 \cdot n^2 \cdot 2^n.$$
Une solution particulière est de la forme $n^3(p_1 n + p_0)2^n$ pour des constantes p_0 et p_1. On a
$$\begin{aligned}&n^3(p_1 n + p_0)2^n\\ &= 6(n-1)^3(p_1(n-1) + p_0)2^{n-1}\\ &\quad - 12(n-2)^3(p_1(n-2) + p_0)2^{n-2}\\ &\quad + 8(n-3)^3(p_1(n-3) + p_0)2^{n-3}\\ &\quad + (n+2)2^n,\end{aligned}$$
d'où
$$\begin{aligned}&8n^3(p_1 n + p_0)\\ &= 24(n-1)^3(p_1(n-1) + p_0)\\ &\quad - 24(n-2)^3(p_1(n-2) + p_0)\\ &\quad + 8(n-3)^3(p_1(n-3) + p_0)\\ &\quad + 8(n+2),\end{aligned}$$

et donc

$$8p_1n^4 + 8p_0n^3 = 8p_1n^4 + 8p_0n^3 + (8 - 192p_1)n + (16 - 48p_0 + 288p_1),$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} 8p_1 &= 8p_1 \\ 8p_0 &= 8p_0 \\ 0 &= 8 - 192p_1 \\ 0 &= 16 - 48p_0 + 288p_1. \end{aligned}$$

On trouve $p_0 = \frac{7}{12}$ et $p_1 = \frac{1}{24}$. Donc

$$a_n^{(p)} = n^3 \left(\frac{1}{24}n + \frac{7}{12}\right) 2^n.$$

Donc

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = \alpha_1 \cdot 2^n + \alpha_2 \cdot n \cdot 2^n + \alpha_3 \cdot n^2 \cdot 2^n + n^3 \left(\frac{1}{24}n + \frac{7}{12}\right) 2^n$$

On a

$$\begin{aligned} 0 = a_0 &= \alpha_1 \cdot 2^0 + \alpha_2 \cdot 0 \cdot 2^0 + \alpha_3 \cdot 0^2 \cdot 2^0 + 0^3 \left(\frac{1}{24} \cdot 0 + \frac{7}{12}\right) 2^0 = \alpha_1 \\ 1 = a_1 &= \alpha_1 \cdot 2^1 + \alpha_2 \cdot 1 \cdot 2^1 + \alpha_3 \cdot 1^2 \cdot 2^1 + 1^3 \left(\frac{1}{24} \cdot 1 + \frac{7}{12}\right) 2^1 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \frac{5}{4} \\ 2 = a_2 &= \alpha_1 \cdot 2^2 + \alpha_2 \cdot 2 \cdot 2^2 + \alpha_3 \cdot 2^2 \cdot 2^2 + 2^3 \left(\frac{1}{24} \cdot 2 + \frac{7}{12}\right) 2^2 = 4\alpha_1 + 8\alpha_2 + 16\alpha_3 + \frac{64}{3}. \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 &= -\frac{1}{4} \\ 4\alpha_1 + 8\alpha_2 + 16\alpha_3 &= -\frac{58}{3} \end{aligned}$$

Donc $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \frac{13}{6}$ et $\alpha_3 = -\frac{55}{24}$, d'où la solution finale :

$$a_n = \frac{13}{6} \cdot n \cdot 2^n - \frac{55}{24} \cdot n^2 \cdot 2^n + n^3 \left(\frac{1}{24}n + \frac{7}{12}\right) 2^n.$$

(c) L'équation caractéristique de l'équation homogène associée est $r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2$. Donc la solution à l'équation homogène associée est

$$a_n^{(h)} = \alpha_1 \cdot (-1)^n + \alpha_2 \cdot n \cdot (-1)^n.$$

Une solution particulière est de la forme $(p_2n^2 + p_1n + p_0)2^n$ pour des constantes p_0, p_1 et p_2. On a

$$\begin{aligned}&(p_2n^2 + p_1n + p_0)2^n \\ =& -2(p_2(n-1)^2 + p_1(n-1) + p_0)2^{n-1} - (p_2(n-2)^2 + p_1(n-2) + p_0)2^{n-2} + (n^2+1)2^n,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}&4(p_2n^2 + p_1n + p_0) \\ =& -4(p_2(n-1)^2 + p_1(n-1) + p_0) - (p_2(n-2)^2 + p_1(n-2) + p_0) + 4(n^2+1)\end{aligned}$$

et donc

$$4p_2n^2 + 4p_1n + 4p_0 = (4 - 5p_2)n^2 + (-5p_1 + 12p_2)n + (4 - 5p_0 + 6p_1 - 8p_2),$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned}4p_2 &= 4 - 5p_2 \\ 4p_1 &= -5p_1 + 12p_2 \\ 4p_0 &= 4 - 5p_0 + 6p_1 - 8p_2.\end{aligned}$$

On trouve $p_0 = \frac{4}{9}$, $p_1 = \frac{16}{27}$ et $p_2 = \frac{4}{9}$. Donc

$$a_n^{(p)} = \left(\frac{4}{9}n^2 + \frac{16}{27}n + \frac{4}{9}\right)2^n.$$

Donc

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = \alpha_1 \cdot (-1)^n + \alpha_2 \cdot n \cdot (-1)^n + \left(\frac{4}{9}n^2 + \frac{16}{27}n + \frac{4}{9}\right)2^n.$$

On a

$$\begin{aligned}0 = a_0 &= \alpha_1 \cdot (-1)^0 + \alpha_2 \cdot 0 \cdot (-1)^0 + \left(\frac{4}{9} \cdot 0^2 + \frac{16}{27} \cdot 0 + \frac{4}{9}\right)2^0 = \alpha_1 + \frac{4}{9} \\ 1 = a_1 &= \alpha_1 \cdot (-1)^1 + \alpha_2 \cdot 1 \cdot (-1)^1 + \left(\frac{4}{9} \cdot 1^2 + \frac{16}{27} \cdot 1 + \frac{4}{9}\right)2^1 = -\alpha_1 - \alpha_2 + \frac{80}{27}.\end{aligned}$$

Autrement dit,

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \frac{4}{9} &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= \frac{53}{27}.\end{aligned}$$

Donc $\alpha_1 = -\frac{4}{9}$ et $\alpha_2 = \frac{65}{27}$, d'où la solution finale :

$$a_n = -\frac{4}{9} \cdot (-1)^n + \frac{65}{27} \cdot n \cdot (-1)^n + \left(\frac{4}{9}n^2 + \frac{16}{27}n + \frac{4}{9}\right)2^n.$$

(d) L'équation caractéristique de l'équation homogène associée est $r^3 - 3r^2 + 4 = (r-2)^2(r+1)$. Donc la solution à l'équation homogène associée est

$$a_n^{(h)} = \alpha_1 \cdot (-1)^n + \alpha_2 \cdot 2^n + \alpha_3 \cdot n \cdot 2^n.$$

Une solution particulière est de la forme $n^2(p_1 n + p_0)2^n$ pour des constantes p_0 et p_1. On a

$$\begin{aligned}
n^2(p_1 n + p_0)2^n &= 3(n-1)^2(p_1(n-1) + p_0)2^{n-1} - 4(n-3)^2(p_1(n-3) + p_0)2^{n-3} - (n+4)2^n \\
8n^2(p_1 n + p_0) &= 12(n-1)^2(p_1(n-1) + p_0) - 4(n-3)^2(p_1(n-3) + p_0) - 8(n+4) \\
8p_1 n^3 + 8p_0 n^2 &= 8p_1 n^3 + 8p_0 n^2 + (-72p_1 - 8)n + (-32 - 24p_0 + 96p_1)
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
8p_1 &= 8p_1 \\
8p_0 &= 8p_0 \\
0 &= -72p_1 - 8 \\
0 &= -32 - 24p_0 + 96p_1
\end{aligned}$$

d'où $p_0 = -\frac{16}{9}$ et $p_1 = -\frac{1}{9}$ et

$$a_n^{(p)} = -n^2\left(\frac{1}{9}n + \frac{16}{9}\right)2^n.$$

Donc

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = \alpha_1 \cdot (-1)^n + \alpha_2 \cdot 2^n + \alpha_3 \cdot n \cdot 2^n - n^2\left(\frac{1}{9}n + \frac{16}{9}\right)2^n.$$

On a

$$\begin{aligned}
0 = a_0 &= \alpha_1 \cdot (-1)^0 + \alpha_2 \cdot 2^0 + \alpha_3 \cdot 0 \cdot 2^0 - 0^2\left(\frac{1}{9}\cdot 0 + \frac{16}{9}\right)2^0 = \alpha_1 + \alpha_2 \\
1 = a_1 &= \alpha_1 \cdot (-1)^1 + \alpha_2 \cdot 2^1 + \alpha_3 \cdot 1 \cdot 2^1 - 1^2\left(\frac{1}{9}\cdot 1 + \frac{16}{9}\right)2^1 = -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 - \frac{34}{9} \\
2 = a_2 &= \alpha_1 \cdot (-1)^2 + \alpha_2 \cdot 2^2 + \alpha_3 \cdot 2 \cdot 2^2 - 2^2\left(\frac{1}{9}\cdot 2 + \frac{16}{9}\right)2^2 = \alpha_1 + 4\alpha_2 + 8\alpha_3 - 32.
\end{aligned}$$

Autrement dit,

$$\begin{aligned}
\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\
-\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 &= \frac{43}{9} \\
\alpha_1 + 4\alpha_2 + 8\alpha_3 &= 34.
\end{aligned}$$

Donc $\alpha_1 = \frac{134}{81}$, $\alpha_2 = -\frac{134}{81}$ et $\alpha_3 = \frac{263}{54}$, d'où la solution finale :

$$a_n = \frac{134}{81} \cdot (-1)^n - \frac{134}{81} \cdot 2^n + \frac{263}{54} \cdot n \cdot 2^n - n^2 \left(\frac{1}{9}n + \frac{16}{9}\right) 2^n.$$

11. Résoudre les récurrences suivantes.

   (a) L'équation peut s'écrire

$$a_n = a_{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

   où $a_1 = 1$. Donc on la résoud comme toutes les autres.
   L'équation caractéristique de l'équation homogène associée est $r^2 - r - 0 = r(r-1)$.
   Donc la solution à l'équation homogène associée est

$$a_n^{(h)} = \alpha_1 \cdot 0^n + \alpha_2 \cdot 1^n = \alpha_2.$$

   Une solution particulière est de la forme $c \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour une constante c. On a

$$\begin{aligned} c \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n &= c \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ c &= 2c + 1 \\ c &= -1. \end{aligned}$$

   Donc

$$a_n^{(p)} = -\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

   Donc

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = \alpha_2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

   On a

$$1 = a_1 = \alpha_2 - \left(\frac{1}{2}\right)^1.$$

   Donc $\alpha_2 = \frac{3}{2}$, d'où la solution finale :

$$a_n = \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

   (b) L'équation peut s'écrire

$$a_n = a_{n-1} + n\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

   où $a_1 = 1$. Donc on la résoud comme toutes les autres.

L'équation caractéristique de l'équation homogène associée est $r^2-r-0=r(r-1)$. Donc la solution à l'équation homogène associée est

$$a_n^{(h)} = \alpha_1 \cdot 0^n + \alpha_2 \cdot 1^n = \alpha_2.$$

Une solution particulière est de la forme $(p_1 \cdot n + p_0)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour des constantes p_0 et p_1. On a

$$\begin{aligned}
(p_1 \cdot n + p_0)\left(\frac{1}{2}\right)^n &= (p_1 \cdot (n-1) + p_0)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + n\left(\frac{1}{2}\right)^n \\
p_1 \cdot n + p_0 &= 2p_1 \cdot (n-1) + 2p_0 + n \\
p_1 \cdot n + p_0 &= (2p_1+1)n + (2p_0 - 2p_1)
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
p_1 &= 2p_1 + 1 \\
p_0 &= 2p_0 - 2p_1,
\end{aligned}$$

d'où $p_0 = -2$ et $p_1 = -1$ et

$$a_n^{(p)} = -(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Donc

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = \alpha_2 - (n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

On a

$$1 = a_1 = \alpha_2 - (1+2)\left(\frac{1}{2}\right)^1.$$

Donc $\alpha_2 = \frac{5}{2}$, d'où la solution finale :

$$a_n = \frac{5}{2} - (n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$