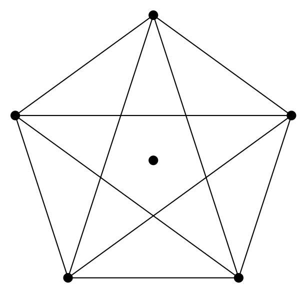
Graphes

1. Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté. Soit $v = |V|$ et $e = |E|$. Vrai ou faux ? Démontrer.

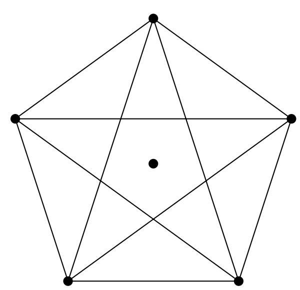
   (a) C'est faux. Voici un contre-exemple.

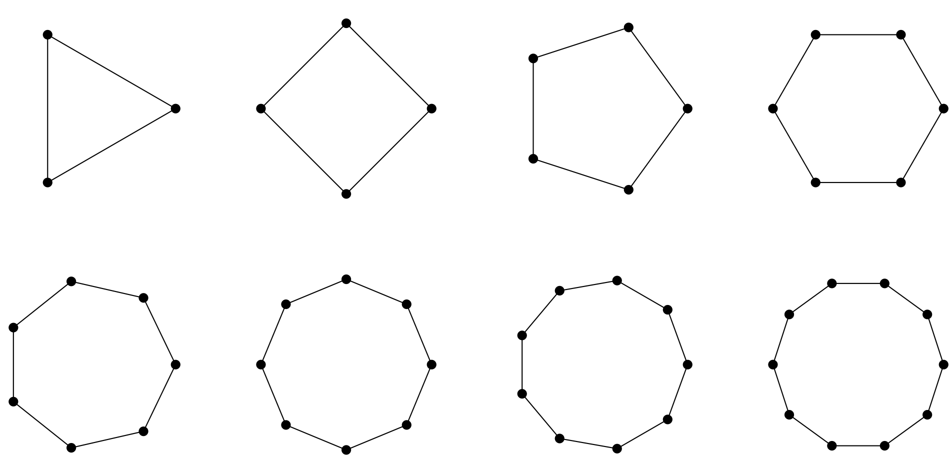
   (b) C'est vrai. Nous avons prouvé ce résultat en classe.

   (c) C'est vrai. Nous avons proucé ce résultat en classe.

   (d) C'est faux. Voici un contre-exemple.

3.



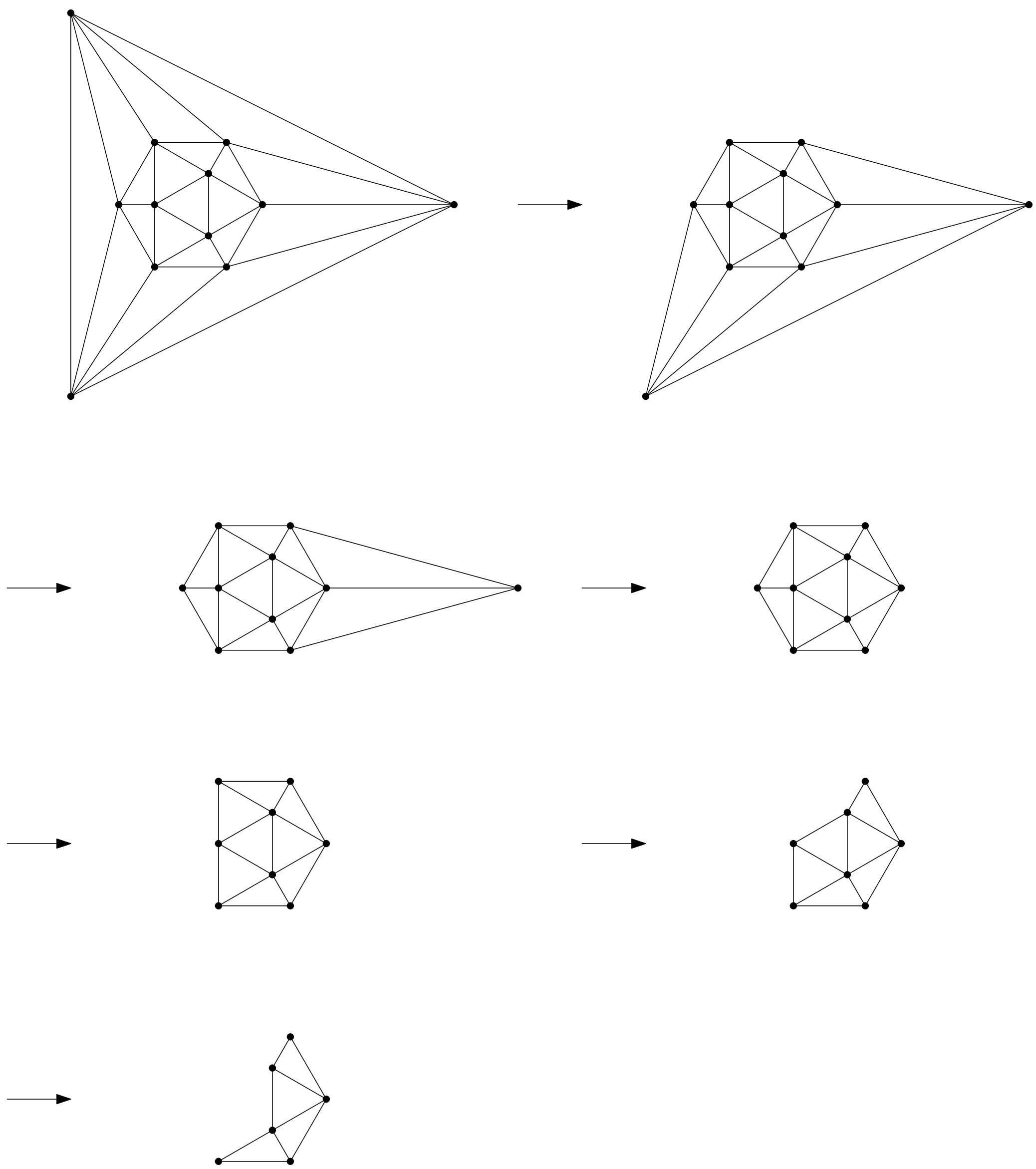
5. La preuve mène directement à un algorithme *récursif*.

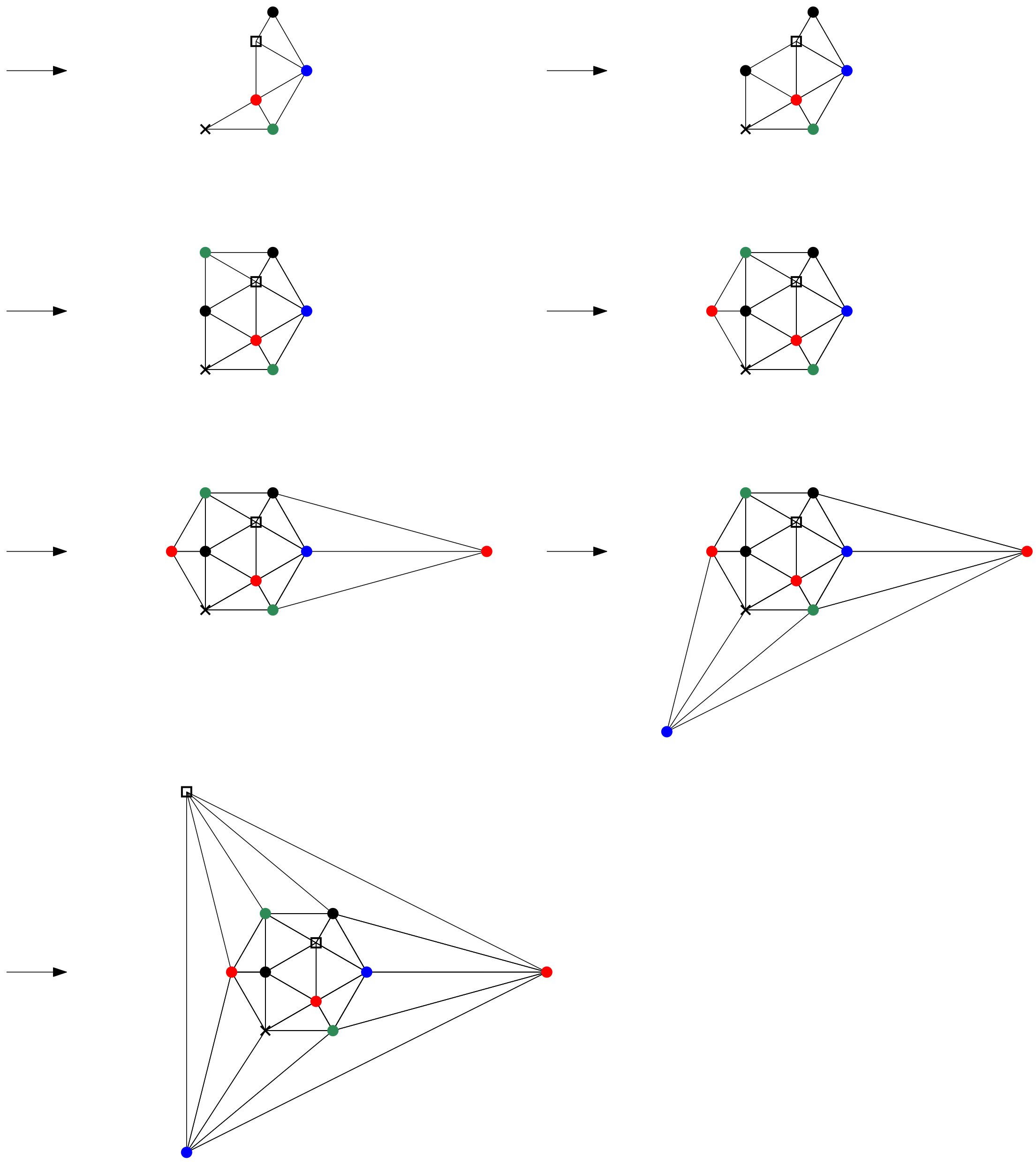
   Soit $G = (V, E)$ le graphe reçu en input.

Si G a au plus 6 sommets, on donne une couleur différente à chaque sommet.

Si G a plus de 6 sommets, on trouve un sommet $u \in V$ de degré au plus 5 (un tel sommet existe par un résultat démontré en classe). On efface u ainsi que toutes ses arêtes adjacentes. On obtient un nouveau graphe G' qui contient un sommet de moins. On 6-colore G' récursivement. Comme u est de degré au plus 5, u a au plus 5 voisins. On peut donc donner à u une couleur qui est différente de celle de ses voisins.

7.





9. C_n est défini pour tout $n \geq 3$. Pour chaque $n \geq 3$, C_n est un cycle. On peut donc le dessiner sans que les arêtes s'intersectent.

   Donc C_n est planaire pour tout $n \geq 3$.

11.

   (a)

$\boxed{n = 1}$

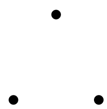
$G_{1,1}$

$\boxed{n = 2}$

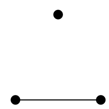
$G_{2,1}$

$G_{2,2}$

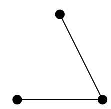
$\boxed{n = 3}$



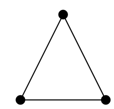
$G_{3,1}$



$G_{3,2}$

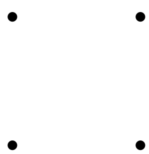


$G_{3,3}$

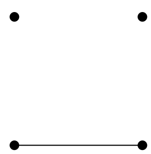


$G_{3,4}$

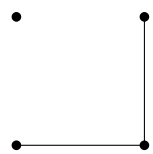
$\boxed{n = 4}$



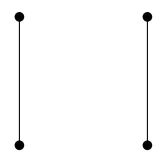
$G_{4,1}$



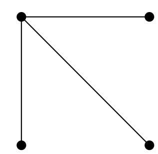
$G_{4,2}$



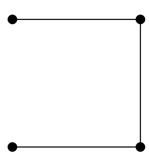
$G_{4,3}$



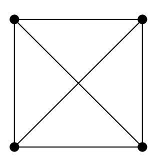
$G_{4,4}$



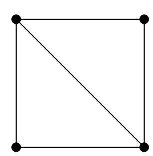
$G_{4,5}$



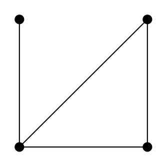
$G_{4,6}$



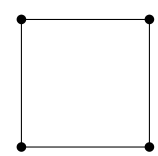
$G_{4,7}$



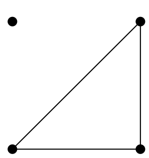
$G_{4,8}$



$G_{4,9}$

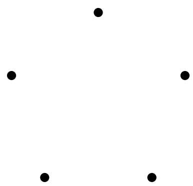


$G_{4,10}$

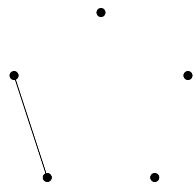


$G_{4,11}$

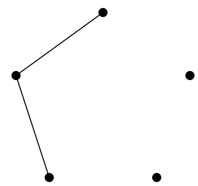
$\boxed{n = 5}$



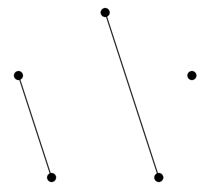
$G_{5,1}$



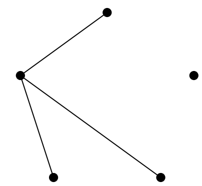
$G_{5,2}$



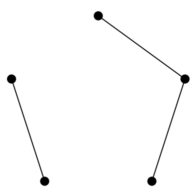
$G_{5,3}$



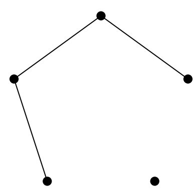
$G_{5,4}$



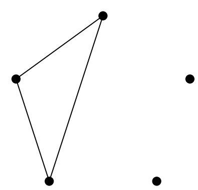
$G_{5,5}$



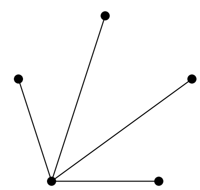
$G_{5,6}$



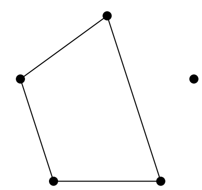
$G_{5,7}$



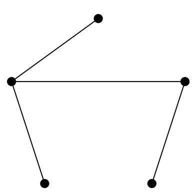
$G_{5,8}$



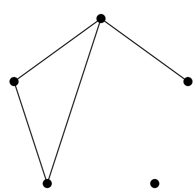
$G_{5,9}$



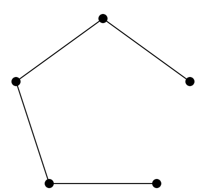
$G_{5,10}$



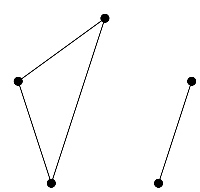
$G_{5,11}$



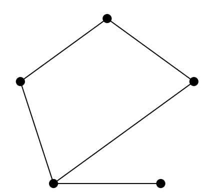
$G_{5,12}$



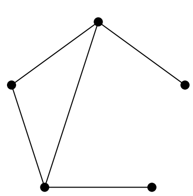
$G_{5,13}$



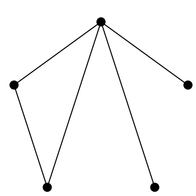
$G_{5,14}$



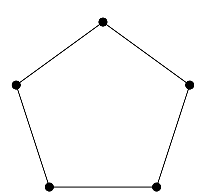
$G_{5,15}$



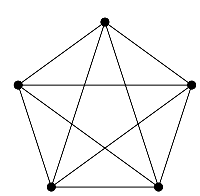
$G_{5,16}$



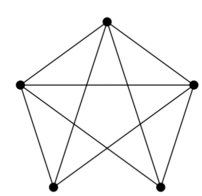
$G_{5,17}$



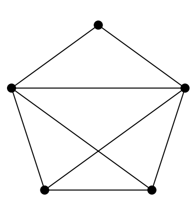
$G_{5,18}$



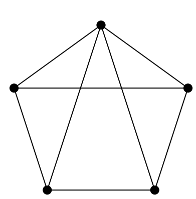
$G_{5,19}$



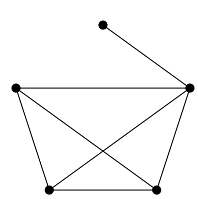
$G_{5,20}$



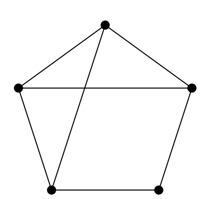
$G_{5,21}$



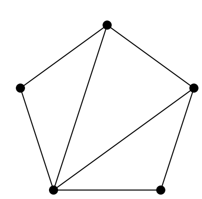
$G_{5,22}$



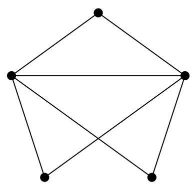
$G_{5,23}$



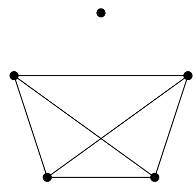
$G_{5,24}$



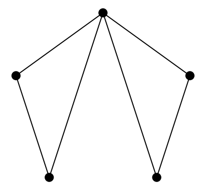
$G_{5,25}$



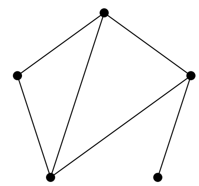
$G_{5,26}$



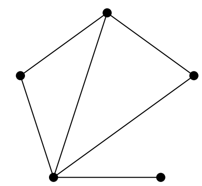
$G_{5,27}$



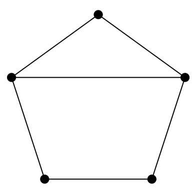
$G_{5,28}$



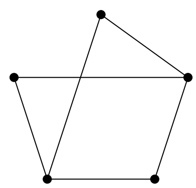
$G_{5,29}$



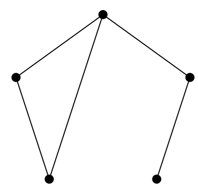
$G_{5,30}$



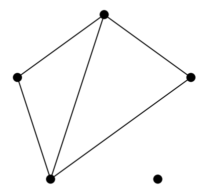
$G_{5,31}$



$G_{5,32}$



$G_{5,33}$



$G_{5,34}$

(b) Tous les graphes de la liste précédente sauf $G_{5,19}$

(c) $G_{1,1}$, $G_{2,2}$, $G_{3,3}$, $G_{3,4}$, $G_{4,5}$, $G_{4,6}$, $G_{4,7}$, $G_{4,8}$, $G_{4,9}$, $G_{4,10}$, $G_{5,9}$, $G_{5,11}$, $G_{5,13}$, $G_{5,15}$, $G_{5,16}$, $G_{5,17}$, $G_{5,18}$, $G_{5,19}$, $G_{5,20}$, $G_{5,21}$, $G_{5,22}$, $G_{5,23}$, $G_{5,24}$, $G_{5,25}$, $G_{5,26}$, $G_{5,28}$, $G_{5,29}$, $G_{5,30}$, $G_{5,31}$, $G_{5,32}$ et $G_{5,33}$.

(d) $G_{1,1}$, $G_{2,2}$, $G_{3,3}$, $G_{3,4}$, $G_{4,5}$, $G_{4,6}$, $G_{4,7}$, $G_{4,8}$, $G_{4,9}$, $G_{4,10}$, $G_{5,9}$, $G_{5,11}$, $G_{5,13}$, $G_{5,15}$, $G_{5,16}$, $G_{5,17}$, $G_{5,18}$, $G_{5,20}$, $G_{5,21}$, $G_{5,22}$, $G_{5,23}$, $G_{5,24}$, $G_{5,25}$, $G_{5,26}$, $G_{5,28}$, $G_{5,29}$, $G_{5,30}$, $G_{5,31}$, $G_{5,32}$ et $G_{5,33}$.

13. **Si** n **est pair**, alors le nombre chromatique de C_n est 2. En effet, supposons que n est pair. Numérotons les sommets : $V = \{v_0, v_1, ..., v_{n-1}\}$ (on a donc que $n-1$ est impair). À tous les sommets d'indice pair, on donne la couleur *rouge* et à tous les sommets d'indice impair, on donne la couleur *bleu*. Pour tout sommet d'incide pair, ses deux voisins sont d'indice impair. De plus, pour tout sommet d'incide impair, ses deux voisins sont d'indice pair. Donc on a une 2-coloration.

    Si n **est impair**, alors le nombre chromatique de C_n est 3. L'explication est un peu plus longue dans ce cas. Supposons que n est impair. Numérotons les sommets : $V = \{v_0, v_1, ..., v_{n-1}\}$ (on a donc que $n-1$ est pair). À tous les sommets d'indice pair ***sauf*** v_{n-1}, on donne la couleur *rouge*. À tous les sommets d'indice impair, on donne la couleur *bleu*. Il reste le sommet v_{n-1} auquel on donne la couleur *vert*.

    Les sommets v_0 et v_{n-1} ont une propriété spéciale : ils ont un voisin d'indice pair et un voisin d'indice impair. Pour tous les autres sommets v_i, si v_i est d'indice pair, ses deux voisins sont d'indice impair ; et si v_i est d'indice impair, ses deux voisins sont d'indice pair. On a donc une 3-coloration.

    Si n est impair, on ne peut pas le colorer avec 2 couleur parce que dans ce cas, C_n n'est pas bipartite. Montrons-le par contradiction. Supposons que n est impair et C_n est bipartite. On doit trouver deux ensembles V_1 et V_2 tels que $V = V_1 \cup V_2$ et $V_1 \cap V_2 = \{\ \}$. Comme il s'agit d'un cycle, pour tout $0 \leq i \leq n-1$, v_i et v_{i+1} ne peuvent pas être dans le même ensemble. On n'a donc pas le choix : $v_0, v_2, ..., v_{n-3} \in V_1$ et $v_1, v_3, ..., v_{n-2} \in V_2$. Mais alors, il n'y a plus de place pour v_{n-1} parce que v_{n-1} est adjacent à v_0 et à v_{n-2}. C'est une contradiction.

15. On a vu en classe que le nombre chromatique d'un graphe G est 2 si et seulement si G est bipartite. Par définition, $K_{m,n}$ est bipartite. Donc le nombre chromatique de $K_{m,n}$ est 2.

17. Pour tout $n \geq 3$, le graphe C_n est un cycle ! Donc en parcourant ce cycle, on visite toutes les arêtes exacxtement une fois. Donc pour tout $n \geq 3$, C_n admet un cycle eulérien.

19. On a vu le résultat suivant en classe : un graphe admet un chemin eulérien (qui n'est pas un cycle) si et seulement si il y a exactement deux sommets de degré impair.

    Si $n = 1$, c'est un cas spécial : K_1 contient un sommet et c'est tout. Selon les définitions vues en classe, il s'agit d'un chemin de longueur 0. Donc K_1 admet un chemin eulérien qui n'est pas un cycle.

    Si $n = 2$, K_2 est un chemin qui n'est pas un cycle et qui visite toutes les arêtes. Donc K_2 admet un chemin eulérien qui n'est pas un cycle.

    Si $n \geq 3$ et n est pair, alors on ne satisfait pas le théorème parce que tous les sommets sont de degré impair et il y a plus de deux sommets. Donc K_n n'admet pas de cycle eulérien.

    Si $n \geq 3$ et n est impair, alors on ne satisfait pas le théorème parce que tous les sommets sont de degré pair. Donc K_n n'admet pas de cycle eulérien.

21. On a vu le résultat suivant en classe : un graphe admet un chemin eulérien (qui n'est pas un cycle) si et seulement si il y a exactement deux sommets de degré impair.

    La notation $K_{m,n}$ signifie que dans la définition de graphe bipartite, $|V_1| = m$ et $|V_2| = n$. Comme on doit avoir exactement deux sommets de degré impair, on prend

    $$m = 1 \quad \text{et} \quad n = 1$$

    ou

    $$m = 1 \quad \text{et} \quad n = 2$$

    ou

    $$m = 2 \quad \text{et} \quad n \geq 3 \text{ impair.}$$

23. Pour tout $n \geq 3$, le graphe C_n est un cycle ! Donc en parcourant ce cycle, on visite tous les sommets exacxtement une fois. Donc pour tout $n \geq 3$, C_n admet un cycle hamiltonien.

25. Pour tout $n \geq 1$, K_n admet un chemin hamiltonien. Considérons l'ensemble des sommets $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Commençons à v_1. Comme il s'agit du graphe complet, on peut prendre un arête vers v_2. Comme il s'agit du graphe complet, on peut prendre une arête vers v_3, et ainsi de suite jusqu'à v_n. On a donc un chemin qui visite chaque sommet exacxtement une fois. De plus, ce chemin n'est pas un cycle parce qu'on ne retourne pas à v_1.

27. **Supposons que** $n = m$. Soit $V_1 = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ et $V_2 = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$. En partant de v_1, on peut suivre le chemin suivant :

$$v_1, u_1, v_2, u_2, v_3, u_3, ..., v_{n-1}, u_{n-1}, v_n, u_n.$$

Donc $K_{m,n}$ admet un chemin hamiltonien qui n'est pas un cycle.

Supposons que $n = m + 1$. Soit $V_1 = \{v_1, v_2, ..., v_{n-1}, v_n\}$ et $V_2 = \{u_1, u_2, ..., u_{n-1}\}$. En partant de v_1, on peut suivre le chemin suivant :

$$v_1, u_1, v_2, u_2, v_3, u_3, ..., v_{n-1}, u_{n-1}, v_n.$$

Donc $K_{m,n}$ admet un chemin hamiltonien qui n'est pas un cycle.

Supposons que $n \geq m + 2$. Alors $K_{m,n}$ n'admet pas de chemin hamiltonien. Voici pourquoi. Comme les seules arêtes de $K_{m,n}$ sont entre V_1 et V_2, un chemin hamiltonien doit alterner entre V_1 et V_2. Supposons que $|V_1| = m$ et $|V_2| = n$. Si on commence dans V_1, comme on doit alterner entre V_1 et V_2, on réussit à visiter seulement m sommets de V_2 (mais $m < n$). Si on commence dans V_2, comme on doit alterner entre V_2 et V_1, on réussit à visiter seulement $m + 1$ sommets de V_2 (mais $m + 1 < m + 2 \leq n$). Donc, dans tous les cas, on n'arrive pas à visiter tous les sommets de V_2.

29. Pour tout $n \geq 1$, trouver la taille d'un matching maximum dans K_n.

Supposons que n **est pair**. Soit $V = \{v_0, v_1, ..., v_{n-1}\}$ (donc $n-1$ est impair). Comme il y a une arête pour chaque paire de sommets, on peut faire le matching suivant

$$\big\{\{v_0, v_1\}, \{v_2, v_3\}, ..., \{v_{n-4}, v_{n-3}\}, \{v_{n-2}, v_{n-1}\}\big\}$$

où tous les sommets sont pris. On ne peut donc plus ajouter d'arête. Donc la taille d'un matching maximum est $\frac{n}{2}$.

Supposons que n **est impair**. Soit Soit $V = \{v_0, v_1, ..., v_{n-1}\}$ (donc $n - 1$ est pair). Comme chaque arête prend deux sommets et qu'un sommet ne peut pas être répété dans un matching, on ne peut pas espérer avoir un matching plus grand que $\frac{n-1}{2}$. De plus, un matching de taille $\frac{n-1}{2}$ existe. En effet, il s'agit de prendre

$$\big\{\{v_0, v_1\}, \{v_2, v_3\}, ..., \{v_{n-5}, v_{n-4}\}, \{v_{n-3}, v_{n-2}\}\big\}.$$

Donc la taille d'un matching maximum est $\frac{n-1}{2}$.

Note : On pourrait combiner les deux cas ensembles en disant que dans K_n, la taille d'un matching maximum est $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, mais ce n'est pas nécessaire.