محاسبهٔ مقادیر و بردارهای ویژه بدون استفاده از دترمینان

محمّد فرشی – سیّد منصور واعظ پور
دانشکدهٔ ریاضی – دانشگاه یزد

چکیده

در کتب جبرخطی روش بدست آوردن مقادیر و بردارهای ویژه با استفاده از دترمینان بیان می‌شود. در این مقاله یک روش سریع با ارزش آموزشی بالا جهت محاسبهٔ مقادیر و بردارهای ویژهٔ یک ماتریس بدون استفاده از دترمینان ارائه می‌شود.

۱ مقدمه

یکی از مفاهیم اساسی در درس جبر خطی، مفهوم دترمینان یک ماتریس مربع می‌باشد که مبنای بیشتر تعاریف و قضایای جبر خطی را تشکیل می‌دهد. دترمینان، یک مفهوم مشکل و غیرشهودی است و معمولاً بدون تمهید انگیزه و زمینه سازی تعریف می‌شود و لذا در دروس دورهٔ متوسطه یا جبرخطی مقدماتی تنها روش محاسبهٔ دترمینان عنوان می‌شود بدون اینکه تعریف مشخصی برای آن ارائه شود. در کتب جبرخطی دترمینان بصورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۱.۱. اگر $A = (a_{ij})_{n\times n}$ یک ماتریس $n \times n$ و $P(n)$ مجموعهٔ همهٔ جایگشتهای روی $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ باشد آنگاه

$$\det(A) = \sum_{\pi\in P(n)} (\mathrm{sign}\pi)\left(a_{\pi(۱),۱}\cdots\cdot a_{\pi(n),n}\right)$$

تعریف فوق برای دترمینان غیر شهودی و ناملموس است به قسمی که از ذکر آن در کتب دبیرستانی خودداری می‌شود و به جای آن فقط به طریقهٔ محاسبهٔ دترمینان اکتفا می‌شود.

حدود ۸۰ سال پیش کوالوسکی[۱] [۴] نظریهٔ جبر خطی بدون استفاده از دترمینان را مورد بررسی قرار داد و سپس بنت[۲] [۲] در سال ۱۹۳۱ روش کوالوسکی را اصلاح کرد. کرایلف[۳] [۵] در سال ۱۹۳۱، زمانی

۱ Kowalewski
۲ Bennett
۳ Krylov

که دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی را مطالعه می کرد روشی را جهت ساده کردن محاسبهٔ چند جمله ای مشخصهٔ $\det(tI-A)$ برای برخی از ماتریسها ارائه نمود. دانیلفسکی [۴][۳] در سال ۱۹۳۷ نتیجهٔ کرایلف را به تمام ماتریسهای مربع تعمیم داد. در سال ۱۹۹۵ آکسلر[۵][۱] در مقالهٔ خود بسیاری از قضایای اصلی جبر خطی را بدون استفاده از دترمینان ثابت کرد.

در این مقاله الگوریتمی جهت محاسبهٔ مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ یک ماتریس مربع بدون استفاده از دترمینان ارائه می‌شود.

۲ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

فرض کنیم A یک ماتریس مربع $n\times n$ روی میدان اعداد مختلط باشد. بردار ناصفر $x\in \mathbb{C}^n$ را یک بردار ویژهٔ ماتریس A گویند هرگاه عدد مختلط λ موجود باشد به طوری که $Ax=\lambda x$. در اینصورت λ را یک مقدار ویژهٔ ماتریس A و x را یک بردار ویژهٔ ماتریس A متناظر با λ گویند. فرض کنید λ یک مقدار ویژهٔ Aو M مجموعهٔ تمام بردارهای ویژهٔ A متناظر با λ باشد. بنابر تعریف M شامل صفر نیست ولی اگر صفر را به M اضافه کنیم آنگاه M یک زیرفضای $\mathbb{C}^n$ خواهد شد. این زیرفضا را فضای ویژهٔ ماتریس A متناظر با λ و بُعد این فضا را چندگانگی[۶] مقدار ویژهٔ λ گویند. اگر λ مقدار ویژهٔ A نباشد، چندگانگی آن را صفر در نظر می گیرند.

اولین سئوالی که در این زمینه مطرح می‌شود این است که آیا هر ماتریس مربع با درایه های مختلط دارای مقدار ویژه می‌باشد؟ در کتب جبرخطی برای اثبات وجود مقدار ویژه از این مطلب که چندجمله‌ای مشخصهٔ ماتریس روی میدان اعداد مختلط دارای ریشه می‌باشد استفاده می‌کنند. امّا نظر به اینکه چندجمله‌ای مشخصهٔ ماتریس بصورت $\det(A-\lambda I)$ تعریف می‌شود، این اثبات به کمک مفهوم دترمینان بدست می‌آید. در قضیهٔ زیر به این سئوال بدون استفاده از دترمینان جواب مثبت می‌دهیم.

قضیه ۱.۲. هر ماتریس مربع روی میدان اعداد مختلط دارای مقدار ویژه می‌باشد.

اثبات. فرض کنید A یک ماتریس مربع از مرتبهٔ n باشد. و بردار ناصفر $x\in\mathbb{C}^n$ را در نظر بگیرید. چون بُعد $\mathbb{C}^n$ برابر n است پس $n+1$ بردار $A^nx,\dots,Ax,x$ وابستهٔ خطی اند. بنابراین اعداد مختلط $a_n,\dots,a_1,a_0$ که همگی صفر نیستند وجود دارد به طوری که $a_0x+a_1Ax+\cdots+a_nA^nx=0$. حال اگر چندجمله‌ای متناظر با این ترکیب خطی را در نظر بگیریم داریم

$$a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n=0$$

چون هر چندجمله ای روی میدان اعداد مختلط تجزیه می‌شود داریم

$$a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n=c(t-r_1)\cdots(t-r_m)\quad c\neq 0$$

۴ Danilevskii
۵ Axler
۶ multiplicity

بنابراین

$$c(A-r_1 I)\cdots(A-r_m I)x=0$$

پس حداقل به‌ازاء یک j داریم $(A-r_j I)x=0$. بنابراین r_j یک مقدار ویژهٔ ماتریس A است. $\square$

قضیهٔ زیر که اثباتی بدون استفاده از دترمینان دارد، نشان می‌دهد که تعداد مقادیر ویژهٔ متمایز یک ماتریس از بُعد آن تجاوز نمی‌کند.

قضیه ۲.۲. بردارهای ویژهٔ متناظر با مقادیر ویژهٔ متمایز ماتریس A مستقل خطی اند.

اثبات. فرض کنید $x_1,\ldots,x_m$ بردارهای ویژهٔ A متناظر با مقادیر ویژهٔ متمایز $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ باشند. ثابت می‌کنیم $x_1,\ldots,x_m$ مستقل خطی اند.

فرض کنید اسکالرهای $a_0,\ldots,a_m$ وجود داشته باشند بطوریکه

$$a_1x_1+\cdots+a_mx_m=0$$

اگر ماتریس $(A-\lambda_2 I)(A-\lambda_3 I)\cdots(A-\lambda_m I)$ را در دو طرف تساوی ضرب کنیم تمام جملات به غیر از جملهٔ اول صفر می‌شود. پس داریم

$$a_1(A-\lambda_2 I)(A-\lambda_3 I)\cdots(A-\lambda_m I)x_1=a_1(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\cdots(\lambda_1-\lambda_m)x_1=0$$

در نتیجه چون $x_1\neq 0$ و $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ متمایز بودند داریم $a_1=0$. بطریق مشابه به ازاء هر j، $a_j=0$. بنابراین $x_1,\ldots,x_m$ مستقل خطی اند. $\square$

به عنوان مثال فرض کنید

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & -6 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

اگر بخواهیم با استفاده از دترمینان مقادیر و بردارهای ویژهٔ ماتریس A را محاسبه کنیم نخست باید دترمینان 4×4 ماتریس $A-\lambda I$ را محاسبه کنیم که مؤلفه های آن خود چندجمله‌ای خطی می‌باشند و سپس ریشه‌های چندجمله‌ای درجهٔ ۴ حاصل را پیدا کنیم و سرانجام برای بدست آوردن بردارهای ویژهٔ این ماتریس فضای پوچ ماتریسهای 4×4 متناظر با هر مقدار ویژه را بدست آوریم.

در این قسمت با آوردن توضیحاتی پیرامون بردارهای ویژهٔ یک ماتریس $n\times n$، الگوریتم ساده ای برای پیدا کردن مقادیر و بردارهای ویژهٔ آن ارائه می‌کنیم. چون بکاربردن این الگوریتم نیاز به فهمیدن مفهوم مقادیر و بردارهای ویژه دارد لذا دارای ارزش آموزشی بالایی است، بر خلاف روش معمول که مقادیر و بردارهای ویژه صرفنظر از فهمیدن مفهوم بدست می‌آید. همچنین این روش بر مبنای مفاهیم اساسی جبرخطی، بخصوص وابستگی و استقلال خطی، می‌باشد و نیاز به اطلاعات وسیعی از جبرخطی ندارد.

فرض کنید A یک ماتریس مربع $n\times n$ روی میدان اعداد مختلط باشد. برای پیدا کردن مقادیر و بردارهای ویژهٔ ماتریس A باید معادلهٔ $Ax=\lambda x$ یا بطور معادل $(A-\lambda I)x=0$ را که در آن $0\neq x\in\mathbb{C}^n$ و $\lambda\in\mathbb{C}$ و 0 نشاندهندهٔ بردار صفر می‌باشد، پیدا نمود.

فرض کنید $0 \neq u \in \mathbb{C}^n$. از آنجا که بُعد $\mathbb{C}^n$ برابر n می‌باشد لذا $n+1$ بردار $A^n u, \ldots, Au, u$ وابستهٔ خطی می‌باشند. فرض کنید k کوچکترین عددی باشد که

$$a_0 u + a_1 Au + \cdots + a_k A^k u = 0 \tag{1}$$

که در آن $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$ و $a_k \neq 0$. بعبارت دیگر k کوچکترین عددی است که $A^k u$ را می‌توان بصورت ترکیب خطی $A^{k-1}u, \ldots, Au, u$ نوشت. بنابر قضیهٔ اساسی جبر، چندجمله‌ای $a_0 + a_1 t + \cdots + a_k t^k$ دارای یک ریشه مانند λ می‌باشد و در نتیجه چندجمله‌ای $Q(t)$ وجود دارد به طوری که $a_0 + a_1 t + \cdots + a_k t^k = (t-\lambda)Q(t)$. بنابراین $(A-\lambda I)Q(A)u = 0$. حال از آنجا که k کوچکترین عدد انتخاب گردید که معادلهٔ (۱) برقرار است پس $Q(A)u \neq 0$. در نتیجه $Q(A)u$ یک بردار ویژهٔ ماتریس A متناظر با λ خواهد بود.

با تغییرات مختصری در توضیحات فوق می‌توان تمام مقادیر ویژهٔ یک ماتریس و فضای ویژهٔ متناظر با آنها را پیدا کرد. این الگوریتم را با ماتریس 4×4 فوق شرح می‌دهیم.

مشابه روند فوق، بردار ناصفر $u \in \mathbb{C}^4$ را در نظر بگیرید. مثلاً $u = (0, 1, -1, 1)$. این بردار را دانه[7] می‌نامند زیرا سایر بردارها با استفاده از این بردار بدست می‌آیند. حال مقادیر $Au, A^2u, \ldots$ را محاسبه می‌کنیم. این روند را تا آنجا ادامه می‌دهیم که اولین بار $A^k u$ ترکیب خطی بردارهای قبلی یعنی $A^{k-1}u, \ldots, Au, u$ باشد. در اینجا داریم

$$u = (0, 1, -1, 1) \quad , \quad Au = (6, -2, 2, -2) \quad , \quad A^2 u = (6, -2, 2, -2)$$

$A^2 u$ اولین برداری است که با بردارهای قبلی وابستهٔ خطی است. یک وابستگی خطی بردارهای فوق بصورت زیر است

$$A^2 u - Au = 0 \tag{2}$$

حال این معادله را به صورت $(A - \lambda I)x = 0$ در می‌آوریم. معادلهٔ فوق را می‌توان به دو صورت زیر نوشت

$$(A - 1I)(Au) = 0 \qquad , \qquad (A - 0I)(Au - u) = 0$$

بنابراین Au در فضای ویژهٔ ۱ است و $Au - u$ به فضای ویژهٔ ۰ تعلق دارد. توجه کنید که چون u و Au مستقل خطی بودند پس بردارهای Au و $Au - u$ ناصفرند. در نتیجه مقدار صریح بردارهای ویژه برابر است با

$$\begin{aligned} Au &= (6, -2, 2, -2) \\ Au - u &= (6, -2, 2, -2) - (0, 1, -1, 1) = (6, -3, 3, -3) \end{aligned}$$

که بردار اول یک بردار ویژهٔ متناظر با ۱ و بردار دوم یک بردار ویژهٔ متناظر با صفر است.

بردارهای u و Au یک زیر فضای دو بُعدی $\mathbb{C}^4$ را تولید می‌کنند. پس اگر این ماتریس بردار ویژهٔ دیگری داشته باشد در خارج از این زیر فضا قرار می‌گیرد یعنی برداری است که از u و Au مستقل خطی است.

[7] seed

دانهٔ جدید را یک بردار مستقل خطی از u و Au در نظر می‌گیریم. این دانه را می‌توان از بین پایهٔ استاندارد انتخاب کرد. مثلاً قرار می‌دهیم $v = (۰, ۰, ۱, ۰)$ که دارای شرایط فوق‌الذکر است. حال روند فوق را تکرار می‌کنیم تا آنجا که A^kv ترکیب خطی بردارهای تولید شدهٔ قبلی یعنی $A^{k-۱}v, \dots, v, Au, u$ باشد. در اینجا فقط لازم است $Av = (-۶, ۴, -۲, ۴)$ محاسبه شود. زیرا $\{u, Au, v\}$ مستقل خطی و $\{u, Au, v, Av\}$ وابستهٔ خطی است. این وابستگی خطی را می‌توان با معادلهٔ زیر نشان داد.

$$Av - ۲v + Au - ۲u = ۰ \qquad (۳)$$

معادلهٔ فوق را می‌توان بصورت زیر نوشت

$$(A - ۲I)(v + u) = ۰$$

در نتیجه $v + u = (۰, ۰, ۱, ۰) + (۰, ۱, -۱, ۱) = (۰, ۱, ۰, ۱)$ یک بردار ویژهٔ ۲ است. چون v خارج از فضای تولید شده توسط u و Au انتخاب شده بود پس $v + u$ نسبت به u و Au مستقل خطی است. فضای تولید شده توسط بردارهای u, Au, v یک زیرفضای سه بُعدی $\mathbb{C}^۴$ است.

حال برای یافتن سایر بردارهای ویژه، در صورت وجود، بردار دیگری را که نسبت به بردارهای تولید شدهٔ قبلی مستقل خطی باشد به عنوان دانه در نظر می‌گیریم. با انتخاب $w = (۰, ۱, ۰, ۰)$، مجموعهٔ $\{u, Au, v, w\}$ مستقل خطی است. امّا بوضوح $\{u, Au, v, w, Aw\}$ وابستهٔ خطی است زیرا تعداد اعضای آن از بُعد فضای $\mathbb{C}^۴$ بیشتر است. یک رابطهٔ وابستگی بصورت زیر است

$$۶Aw - ۱۲w + Au - ۴u = ۰ \qquad (۴)$$

معادلهٔ فوق را به تنهایی نمی‌توان به شکل $(A - \lambda I)x = ۰$ نوشت. امّا با در نظر گرفتن روابط (۲) و (۳) و (۴) داریم

$$۶Aw - ۱۲w + A^۲u - ۴u = ۰$$

$$(A - ۲I)(۶w + Au + ۲u) = ۰$$

در نتیجه $۶w + Au + ۲u = (۶, ۶, ۰, ۰)$ یک بردار ویژهٔ ۲ است. این بردار ویژه نیز با سایر بردارهای ویژه مستقل خطی است زیرا w خارج از فضای تولید شده توسط بردارهای ویژهٔ قبلی انتخاب شده است و ضریب w در بردار فوق ناصفر است.

با روش دستی از معادله های (۲) و (۳) و (۴) معادلات زیر بدست می‌آید

$$(A - ۲I)(Au + u) + ۲u = ۰$$

$$(A - ۲I)(v + u) = ۰$$

$$(A - ۲I)(۶w + u) - ۲u = ۰$$

معادلات فوق را بصورتی با هم ترکیب می‌کنیم که جملات اضافی حذف شود. در این راستا با جمع کردن معادلهٔ اول و سوم داریم

$$(A - ۲I)(Au + u) + ۲u + (A - ۲I)(۶w + u) - ۲u = ۰$$

پس $(A-2I)(Au+u+6w+u)=0$. بنابراین $6w+Au+2u=(6,6,0,0)$ یک بردار ویژهٔ ۲ است. محاسبات در اینجا به پایان می‌رسد زیرا بردارهای تولید شده، $\mathcal{C}^4$ را تولید می‌کنند و در نتیجه دانهٔ دیگری نداریم. بنابراین مقادیر ویژهٔ ماتریس A عبارتند از ۱،۰ و ۲ و فضای ویژهٔ متناظر با آنها به ترتیب دارای بُعد ۱،۱ و ۲ می‌باشد. اگر معادلهٔ (۴) را به هیچ عنوان نتوان به شکل $(A-\lambda I)x=0$ تبدیل کرد نتیجه می‌شود که بردار ویژهٔ دیگری متناظر با ۲ وجود ندارد و در نتیجه بردارهای ویژه فضای $\mathcal{C}^4$ را تولید نمی‌کند.

این محاسبات را می‌توان بصورت فشردهٔ زیر نمایش داد که با توضیحات فوق براحتی بدست می‌آید.

$$
\begin{array}{cccc}
 & A & & \\
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc|cc|cc}
u & Au & A^2u & v & Av & w & Aw
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccc}
3 & -1 & -6 & 1 \\
-1 & 3 & 4 & -1 \\
1 & -1 & -2 & 1 \\
-1 & 1 & 4 & 1
\end{array}\right]
\begin{array}{ccc|cc|cc|}
0 & 6 & 6 & 0 & -6 & 0 & -1 \\
1 & -2 & -2 & 0 & 4 & 1 & 3 \\
-1 & 2 & 2 & 1 & -2 & 0 & -1 \\
1 & -2 & -2 & 0 & 4 & 0 & 1 \\
\hline
0 & -1 & 1 & & & & \\
\hline
-2 & 1 & & -2 & 1 & & \\
\hline
-4 & 1 & & 0 & & -12 & 6
\end{array}
$$

سمت چپ، ماتریس A قرار می‌گیرد و در سمت راست A بردارهای تولید شده نوشته می‌شود و نام بردارهای تولید شده در بالای هر ستون آورده می‌شود. بعد از هر برداری که وابستهٔ خطی بردارهای قبلی اش است یک خط عمودی کشیده می‌شود. اعدادی که در ردیفهای افقی زیر بردارها نوشته شده است، ضرایب بردارها است که در هر وابستگی خطی بدست می‌آید. r امین ردیف زیر بردارها، حاوی ضرایب بردارها در r امین رابطهٔ وابستگی است. همانطور که قبلاً بیان شد از رابطهٔ وابستگی برای ساختن بردارهای ویژه استفاده می‌شود.

حال با توجه به اینکه با روند فوق می‌توان مقادیر ویژه را بدست آورد می‌توان دترمینان یک ماتریس را بر مبنای مقادیر ویژهٔ آن تعریف کرد.

تعریف ۳.۲. حاصلضرب مقادیر ویژهٔ ماتریس مربعی A با احتساب چندگانگی آن را دترمینان Aمی‌نامیم.

ثابت می‌شود که دترمینان با تعریف فوق با فرمول معمول برای دترمینان(تعریف ۱.۱) معادل است[۱]. این تعریف علاوه بر سادگی، قضایایی را که با تعریف متداول دترمینان اصلاً واضح نیست، روشن می‌سازد. بعنوان مثال معادل بودن وارون‌پذیری یک ماتریس با اینکه دترمینان آن ناصفر باشد بوضوح از تعریف فوق بدست می‌آید.

مراجع

[1] S. Axler, *Down with determinants*, Amer. Math. Monthly, **102**(1995), 139-154.

[2] A. A. Bennett, *Construction of a rational canonical form for a linear transformation*, Amer. Math. Monthly, **38**(1931), 377-383.

[3] A. M. Danilevskiĭ, *On the numerical solution of the secular equation(Russian)*, Matem. Sb. (Rec. Math.), **Vol 2 No. 44**(1937), 159-162.

[4] G. Kowalewski, *Natüliche normalformen linearer Transformationen*, Ber. Sächs. Ges. d. Wissenschaften, Math-Phys. Kl. **69**(1917), 325-335.

[5] A. N. Krylov, *On the numerical solution of the equation which is technical questions determines the osacillation frequencies of meterial system(Russian)*, Izv. Akad. Nauk. SSR, otdel. Mat. i Estest. Nauk. (1931), 491-539.

[6] W. A. McWorter,Jr., I. Meyers, *Computing eigenvalues and eigenvectors without determinants*, Math. Magazine, **71**(1998), 24-33.